目　录

第一章　Green函数……(1)

§1.　一维问题……(1)

§2.　位势方程……(17)

§3.　Green函数的求法……(25)

§4.　热传导方程……(37)

第二章　变分方法……(50)

§1.　Hilbert空间与Sobolev空间……(50)

§2.　变分原理……(70)

§3.　变分问题的几种近似解法……(85)

§4.　发展方程的变分方法……(100)

第三章　分离变量法……(112)

§1.　方法概述……(112)

§2.　Sturm－Liouville问题……(114)

§3.　Sturm－Liouville问题的推广……(137)

§4.　应用实例……(143)

第四章　连续介质力学的数学模型……(155)

§1.　预备知识……(155)

§2.　应变矩阵……(158)

§3.　应力矩阵……(165)

§4.　守恒律……(169)

§5.　相容性定律和数学模型(流体情形)……(172)

§6.　相容性定律和数学模型(固体情形)……(196)

§7.　相似解(量纲分析)……(210)

第五章　非线性波和特征线方法……(217)

§1.　一阶线性偏微分方程的数学理论……(217)

§2. 一阶非线性方程和交通流问题……(230)
§3. 一维气体动力学……(241)
§4. 平面定常流动……(258)
第六章 孤立波和行波解……(268)
§1. 孤立波的发现和发展……(268)
§2. KdV方程……(269)
§3. 三次Schrödinger方程……(278)
§4. Sine-Gordon方程……(281)

第一章　Green　函　数

Green函数在求解常微分方程边值问题和偏微分方程边值问题以及初边值问题中有着特殊重要的地位.Green函数法的优越性在于把具有任意非齐次项和任意边值的定解问题归结为求解一个特定的边值问题,它仅依赖于微分算子、边界条件的形式和区域的形状.一旦求得了相应的Green函数,就可以通过叠加原理给出原定解问题的解.

在本章中,我们就一维问题和多维问题分别给出Green函数的定义和物理意义,并介绍几种求Green函数的方法.

§1.　一 维 问 题

1.1　问题的提出

我们先考虑简单的物理模型:设有一根拉紧的均匀且柔软的轻弦,长度$l=1$,两端固定,在垂直外力作用下当弦达到平衡时,讨论弦的形状.

如图1-1建立坐标系,把不受外力作用时弦的平衡位置取为Ox轴,并以$f(x)$、$y(x)$分别表示弦上横坐标为x的点处所受的外力密度(单位:N/m)和位移(单位:m).由于此时惯性力为零,在微小位移的情况下,弦的平衡方程为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[T(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]=f(x),$$

其中$T(x)$为弦上横坐标为x的点所受张力的大小,为讨论简单起见,不妨设$T(x)=1$.于是问题简化为求解常微分方程边值问题

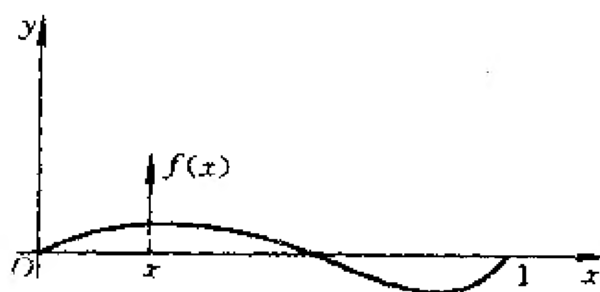


图 1－1

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x) \qquad (0<x<1), & (1.1) \\ y(0)=y(1)=0. & (1.2) \end{cases}$$

它的解可表示为

$$y(x)=x\int_0^1 d\xi\int_0^\xi f(s)ds-\int_0^x d\xi\int_0^\xi f(s)ds. \tag{1.3}$$

为使此解具有较对称的形式，通过交换积分次序，得

$$y(x)=\int_0^x s(1-x)f(s)ds+\int_x^1 x(1-s)f(s)ds.$$

定义函数

$$G(x,s)=\begin{cases} s(1-x), & 0\leqslant s<x; \\ x(1-s), & x<s\leqslant 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

则有

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)ds, \tag{1.5}$$

其中核函数$G(x,s)$只依赖于微分算子$L=-\dfrac{d^2}{dx^2}$、边界条件(1.2)和区间长度[0,1]，而与方程(1.1)右端的非齐次项$f(x)$无关.我们把(1.4)式定义的$G(x,s)$称为Green函数.我们将证明它是某一个特定边值问题的解.因此，所谓Green函数法，就是通过把任意的非齐次项$f(x)$的常微分方程边值问题(1.1)、(1.2)，归结为一个特殊边值问题的求解，即只要求出了Green函数(1.4)，就可以利用叠加原理

给出解的一般表达式(1.5).

1.2 Green函数的特性和物理意义

为了给Green函数下一个确切的定义，我们先就边值问题(1.1)、(1.2)的Green函数(1.4)的特性及物理意义作一些探讨.

设$x_0\in(0,1)$是一固定点，则由(1.4)式定义的Green函数$G(x_0,x)$具有下述性质:

1° $G(x_0,0)=G(x_0,1)=0$，即当$0<x_0<1$时$G(x_0,x)$满足齐次边界条件(1.2);

2° $-\dfrac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2}=0(x\neq x_0)$，即当$x\neq x_0$时$G(x_0,x)$是相应于(1.1)的齐次方程的解;

3° $G(x_0,x_0-0)=G(x_0,x_0+0)$，即当$0<x_0<1$时$G(x_0,x)$在$x=x_0$处连续;

4° $[-G'_x(x_0,x_0+0)]-[-G'_x(x_0,x_0-0)]=1$，即当$0<x_0<1$时$G(x_0,x)$对$x$的一阶导数在点$x=x_0$处有跳跃，间断量是1;

5° $G(x_0,x)=G(x,x_0)$，即Green函数关于自变量x及参变量x_0具有对称性.

为了说明具有上述特性的Green函数的物理意义，我们考察长度为1，两端固定的弦，在$x=x_0$处受垂直的单位集中力作用下处于平衡状态时弦的形状$y(x)$. 如图1－2所示，弦在$x=x_0$处受到三个力的作用. 张力$\boldsymbol{T}_-$在y轴的投影为

$$-T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-T\sin\alpha\approx-T\tan\alpha=-T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0-0}$$

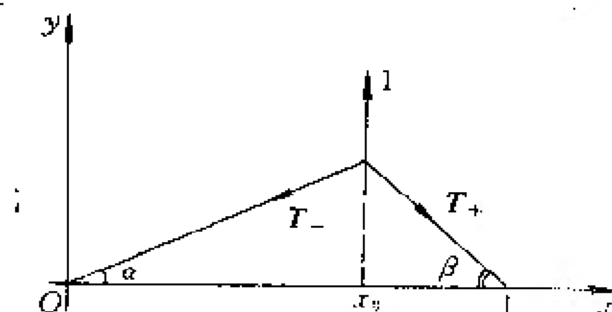


图 1－2

其中$T=|\boldsymbol{T}|$为张力$\boldsymbol{T}$的大小. 同样地，张力$\boldsymbol{T}_+$在y轴的投影为

$$-T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=-T\sin\beta\approx-T\tan\beta=T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0-0}.$$

当三个力处于平衡时,有关系式

$$T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0+0}+\left(-T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x_0-0}+1=0.$$

故在集中力作用下,弦的平衡问题归结为位移$y(x)$应适合下述定解问题:

$$\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \qquad (x\neq x_0), & (1.6)\\ y(0)=y(1)=0, & (1.7)\\ y(x_0-0)=y(x_0+0), & (1.8)\\ \left(-T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x_0+0}-\left(-T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x_0-0}=1. & (1.9)\end{cases}$$

比较$y(x)$与$G(x_0,x)$,可见Green函数$G(x_0,x)$的物理意义是:长度为1,两端固定的弦,在点$x=x_0$处由于受单位集中力的作用在点x处所产生的位移(其中张力$T=1$).那末,对于连续分布的外力密度$f(s)$,可把弦分成若干小段,在每一小段$[s_i,s_i+\Delta s]$上作用的外力近似为$f(s_i)\Delta s$,这里假设了它作为一集中力作用在$s=s_i$点处.于是,在点x处所产生的位移近似为$G(x,s_i)f(s_i)\Delta s$.因为问题是线性的,根据叠加原理,由于外力密度$f(s)$分布在整个区间$[0,1]$上,它所产生的位移应为$\sum\limits_i G(x,s_i)f(s_i)\Delta s$.令$\Delta s\to 0$,即得

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

此即(1.5)式.

1.3 广义函数与δ函数

为了能给Green函数下一个确切的定义,我们先引进广义函数与δ函数的概念.

一、集中力的密度的描述

如何确切地来描述集中力的力密度是我们首先要解决的问

题. 为简单起见，假定在包含原点的区间(a,b)上，在原点$x=0$处受到一个单位集中力的作用. 实际上，集中量的分布可以通过一个极限过程来理解. 我们可以认为在原点的小邻域$|x|\leqslant\varepsilon$上均匀地作用着一个分布力，力的密度为$f_\varepsilon(x)$. 取

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x|\leqslant\varepsilon;\\ 0\ , & |x|>\varepsilon,\text{且}x\in[a,b].\end{cases}\tag{1.10}$$

如图1－3所示. 这样，区间$[-\varepsilon,\varepsilon]$所受的力为

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1.$$

令$\varepsilon\to0$，从形式上得到$f_\varepsilon(x)\to f(x)$. 其中

$$f(x)=\begin{cases}\infty, & x=0;\\ 0, & x\in[a,b],\text{但}x\neq0.\end{cases}$$

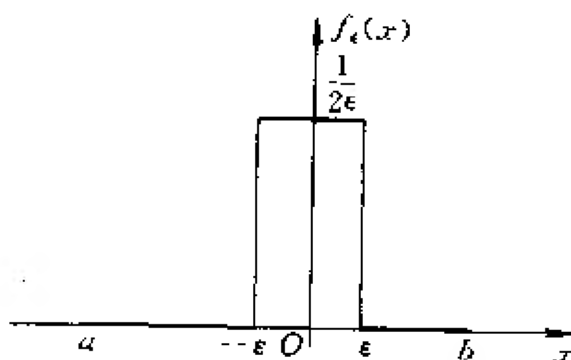


图 1－3

且

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\mathrm{d}x=1.$$

但是，以这种极限形式得到的$f(x)$作为描述单位集中力的力密度“函数”，与经典的数学分析中函数概念已是不相同的了. 简单地认为$f(x)$是一个几乎处处等于零的函数是不正确的，因为按通常的积分意义应有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 但是从物理直观上来说，这个积分值又礼然应该等于整个区间$[a,b]$上所受的力，其大小为1. 由此可见，当$\varepsilon\to0$时，$f_\varepsilon(x)$的极限函数已不能是古典意义下的极限. 为此，我们需要扩充极限的概念和函数的概念.

二、广义函数

为了把通常的函数概念扩充到广义函数，并理解和掌握广义函数的严格数学理论，必须具备一定的泛函分析知识基础，这越出

了本课程的讨论范围. 为了使以下的叙述更加直观和初等, 我们准备仿照从有理数扩充到实数的步骤, 通过引进弱收敛的概念把连续函数扩充到广义函数. 限于篇幅, 我们这里的叙述不可能非常严格.

定义 1 若$\{u_n(x)\}$是给定在(a,b)上$(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$的可积函数序列, 如果对任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在, 则称$\{u_n(x)\}$为弱收敛意义下的基本列. 这里

$$C_0^\infty(a,b)=\{\varphi(x)|\varphi\in C^\infty(a,b), \text{且在}a,b\text{附近}\varphi\equiv0\}.$$

有时也把$C_0^\infty(a,b)$记成$\mathscr{D}(a,b)$, 称为试验函数(test function)类.

当a,b分别为$-\infty$和$+\infty$时,

$$C_0^\infty(-\infty,+\infty)=\{\varphi(x)|\varphi\in C^\infty(-\infty,+\infty), \text{且supp }\varphi\text{有界}\},$$

其中suppφ称为函数$\varphi(x)$的支集, 它是使$\varphi(x)\neq0$的点集的闭包.

例 若$u_n(x)\in C[a,b]$, 且$\{u_n(x)\}$是在$[a,b]$上一致收敛意义下的基本列, 则它也必是弱收敛意义下的基本列, 且存在$u(x)\in C[a,b]$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b).$$

这说明弱收敛是一致收敛概念的推广, 而且在一致收敛意义下, 其极限值仍然表成一个积分形式.

定义 2 若函数列$\{u_n(x)\}$、$\{v_n(x)\}$都是弱收敛意义下的基本列, 且对于任意$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b v_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则称$\{u_n(x)\}$、$\{v_n(x)\}$两个基本列等价.

按此等价关系我们可以把基本列划分为等价类. 等价的基本列都有同一极限值, 不妨把它记作$U(\varphi)$, 即是一个只与$\varphi(x)$有关的常数. 也就是说, 这个极限值事实上是定义了一个由$C_0^\infty(a,b)\to\mathbf{R}$(实数)的映射, 通常把这称之为泛函. 也可把$U(\varphi)$记作$\langle u,\varphi\rangle$, 这里$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示一种对偶关系. 根据前面所述, 对于一致收敛的基本列$\{u_n(x)\}$, 这个对

偶关系可以用积分$\int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$来表示.所以我们在形式上亦有

$$\langle u,\varphi\rangle \xlongequal{\text{记作}} \int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

这里的积分纯粹是一种记号,只是作为对偶关系来理解.

正像将有理数扩充为实数一样,我们把凡是弱收敛的基本列$\{u_n(x)\}$都赋予一个极限元,记为$u(x)$,并记

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle u,\varphi\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

我们称这样的极限元为广义函数.

综合以上讨论,现在我们可对广义函数定义如下:

定义3 若在区间(a,b)上$(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$的可积函数列$\{u_n(x)\}$,对任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$,极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在,则极限值定义了一个泛函u: $C_0^\infty(a,b)\to\mathbf{R}$,把它记作

$$\langle u,\varphi\rangle \quad \text{或} \quad \int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle u,\varphi\rangle \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \tag{1.11}$$

并称$u(x)$是函数列$\{u_n(x)\}$的弱极限元素,记作

$$w-\lim_{n\to\infty} u_n(x)=u(x) \tag{1.12}$$

或

$$u_n(x)\xrightarrow{\quad} u(x) \quad (n\to\infty). \tag{1.13}$$

这样定义的"函数"(即泛函)$u(x)$称为广义函数.

请注意:我们把泛函u写成$u(x)$,这纯粹是一种记号,它绝不能理解为u是x的函数!作为泛函u,谈它在某一点$x=x_0$的值$u(x_0)$是没有意义的,它的值是通过与试验函数类$C_0^\infty(a,b)$中函数的"作用"才

得到显示.

例 所有的可积函数$u(x)$都是广义函数.

事实上,我们只需取$\{u_\varepsilon(x)\}$就是$\{u(x)\}$本身,则可积函数$u(x)$就符合广义函数的定义.亦即广义函数包含了所有的可积函数.但在下面我们又可看到上述广义函数的定义又确实是扩充了可积函数以外的新的函数.

注 定义3中的函数列也可以是$\{u_\varepsilon(x)\}$,并取$\varepsilon\to 0$时的极限.即(1.11)式也可换成

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b u_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle u,\varphi\rangle,\ \forall\,\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b). \tag{1.14}$$

三、 δ 函数的定义

定义 4 若在区间(a,b)上$(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$的可积函数列$\{f_\varepsilon(x)\}$,对任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$,极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在,且极限值等于$\varphi(0)$,即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0),\quad \forall\,\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b), \tag{1.15}$$

则把函数列$\{f_\varepsilon(x)\}$当$\varepsilon\to 0$时确定的弱极限元记作$\delta(x)$,称为Dirac δ函数,简称δ函数.

由上述定义可知,δ函数是一个特殊的广义函数.根据定义3中式(1.11)的记法,δ函数也可表示成

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle=\int_a^b \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\varphi(0),\quad \forall\,\varphi\in C_0^\infty(a,b). \tag{1.16}$$

这里等式右端的积分式也纯粹是一个形式上的数学符号,与通常的积分含义是有区别的.

现在我们回到对集中力的力密度的描述.对于由式(1.10)确定的函数列$\{f_\varepsilon(x)\}$,对于任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\varphi(\theta\varepsilon)\cdot 2\varepsilon \qquad (-1<\theta<1)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\theta\varepsilon)$$

$$=\varphi(0).$$

由此可见，式(1.10)表示的函数列所确定的弱极限元正是δ函数.即

$$f_\varepsilon(x)\longrightarrow\delta(x) \qquad (\varepsilon\to 0).$$

所以，我们可以用广义函数$\delta(x)$来描述一个集中量的密度分布.而$\delta(x)$已不是通常意义下的可积函数.

事实上，按定义3定义的广义函数，我们以前在解数学物理方程定解问题时已经遇到过，不过当时未曾定义广义函数而已.例如，我们都知道无限长细杆热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty<x<+\infty,t>0), \quad (1.17)\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (-\infty<x<+\infty) \quad (1.18)\end{cases}$$

的解可用Poisson公式表示为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{1.19}$$

其中核函数

$$K(x,t;\xi,0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \tag{1.20}$$

容易验证函数$K(x,t;\xi,0)$具有如下性质

$$\lim_{t\to 0}K(x,t;\xi,0)=\begin{cases}\infty, & 当x=\xi;\\ 0, & 当x\neq\xi.\end{cases} \tag{1.21}$$

且若$\varphi(x)\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$，则有

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=\varphi(x). \tag{1.22}$$

因此，按定义3当$t\to 0$时，核函数$K(x,t;\xi,0)$的弱极限元就是一个广

义函数.如果令$x=0$, $t=\dfrac{1}{n}$, 记$K(0,t;\xi,0)=K_n(\xi)$, 则

$$K_n(\xi)\longrightarrow\delta(\xi)\qquad(n\to\infty).$$

根据δ函数的定义4及基本列的等价性, 函数列$\left\{\left(\dfrac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}\right\}$也是以$\delta(x)$为弱极限元的. 这是由于对任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$, $\dfrac{d\varphi}{dx}$是有界的, 所以

$$|\varphi(x)-\varphi(0)|=\left|\int_0^x\frac{d\varphi}{dx}dx\right|\leqslant M|x|.$$

其中M是一个有限的正常数.于是

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(x)-\varphi(0)]e^{-nx^2}dx\right|\leqslant 2M\int_0^{+\infty}xe^{-nx^2}dx$$

$$\leqslant\frac{M}{n}\left(-e^{-nx^2}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{M}{n}.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}\varphi(x)dx=\varphi(0)+O\left(\frac{M}{\sqrt{n}}\right)$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}\varphi(x)dx=\varphi(0),\quad\forall\,\varphi(x)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty).$$

此即表明

$$\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nx^2}\longrightarrow\delta(x)\qquad(n\to\infty).\tag{1.23}$$

由于$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)$, 因此在$x\neq0$处任意改变试验函数$\varphi(x)$的函数值, $\langle\delta,\varphi\rangle$的值是不变的. 所以, 从直观上可以理解为当$x\neq0$时$\delta(x)\equiv0$. 因此对于$\delta(x)$, 我们不妨把试验函数空间$C_0^\infty(a,b)$扩充为$C^\infty(a,b)$, $\langle\delta,\varphi\rangle$应该还是有意义的, 而且仍然有$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)$. 对于$\delta(x)$的这一点说明在下文的讨论中是有用的.

与定义4类似，我们可以定义更一般形式的δ函数$\delta(x-x_0)$如下：

若在区间(a,b)上的可积函数列$\{f_\varepsilon(x)\}$，对任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b)$有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(x_0),\quad \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(a,b),\tag{1.24}$$

则把函数列$\{f_\varepsilon(x)\}$当$\varepsilon\to 0$时确定的弱极限元记作$\delta(x-x_0)$，并类似地可表示成

$$\begin{aligned}\langle\delta(x-x_0),\varphi(x)\rangle&=\int_a^b\delta(x-x_0)\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\varphi(x_0).\end{aligned}\tag{1.25}$$

在前面我们曾提到过的一维无限区间上热传导方程初值问题的解的Poisson公式，式中的核函数$K(x,t;\xi,0)$就有

$$K(x,t;\xi,0)\longrightarrow\delta(x-\xi)\qquad(t\to 0).$$

四、多维δ函数

类似地，还可以定义多维空间的δ函数。以三维空间为例，我们用$\delta(x,y,z)$表示三维空间的δ函数。这时，对任意函数$\varphi(x,y,z)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$，有

$$\begin{aligned}\langle\delta,\varphi\rangle&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y,z)\varphi(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\varphi(0,0,0).\end{aligned}\tag{1.26}$$

考虑广义函数的“直积”(direct product)$\delta(x)\delta(y)\delta(z)$，它是$C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$上的一个广义函数，它的定义是

$$\begin{aligned}&\langle\delta(x)\delta(y)\delta(z),\varphi(x,y,z)\rangle\\&=\langle\delta(x),\langle\delta(y),\langle\delta(z),\varphi(x,y,z)\rangle\rangle\rangle.\end{aligned}\tag{1.27}$$

之所以可以这样定义，是因为

$$\varphi(x,y,z)\in C_0^\infty(\mathbf{R}_z^1),\quad\forall(x,y)\in\mathbf{R}_{xy}^2,$$

其中$\mathbf{R}_z^1$表示z轴上全体实数的集合，$\mathbf{R}_{xy}^2$表示xy平面上的全体实数集合，其余含义类似。故

$$\langle\delta(z),\varphi(x,y,z)\rangle=\varphi(x,y,0)\in C_0^\infty(\mathbf{R}_{xy}^2),\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}_z^1),$$

以及

$$\langle\delta(y),\langle\delta(z),\varphi(x,y,z)\rangle\rangle=\varphi(x,0,0)\in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^1),\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}_{yz}^2).$$

和

$$\langle\delta(x),\langle\delta(y),\langle\delta(z),\varphi(x,y,z)\rangle\rangle\rangle=\varphi(0,0,0),\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3).$$

上式也可表示成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\varphi(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\varphi(0,0,0),\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3).\tag{1.28}$$

比较式(1.26)与(1.28),有

$$\delta(x,y,z)=\delta(x)\delta(y)\delta(z),\tag{1.29}$$

即三维δ函数可以看作是三个一维δ函数的直积. 一般地,对点$P(x,y,z)$、$P_0(x_0,y_0,z_0)$有

$$\delta(P-P_0)=\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$
$$=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\tag{1.30}$$

且

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}}\delta(P-P_0)\varphi(P)\mathrm{d}P=\varphi(P_0),\quad \forall\varphi(P)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3).\tag{1.31}$$

引理 对于二维δ函数,在可逆变换

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y)\tag{1.32}$$

下,有关系式

$$\delta(x-x_0,y-y_0)=|J|\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0),\tag{1.33}$$

其中$\xi_0=\xi(x_0,y_0)$, $\eta_0=\eta(x_0,y_0)$. J为Jacobi式,即

$$J=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}.\tag{1.34}$$

证明 设Oxy平面上区域Ω在变换(1.32)下映射为$O\xi\eta$平面上区域Ω'. 又设$\varphi(x,y)\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\bar{\varphi}(\xi,\eta)=\varphi(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=\varphi(x,y).$$

若$(x_0,y_0)\in\Omega$的对应点是$(\xi_0,\eta_0)\in\Omega'$,即

$$x_0=x(\xi_0,\eta_0),$$
$$y_0=y(\xi_0,\eta_0), \tag{1.35}$$

则

$$\varphi(x_0,y_0)=\iint_\Omega \delta(x-x_0,y-y_0)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另一方面

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\xi_0,\eta_0)&=\iint_{\Omega'} \delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)\bar{\varphi}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\ &=\iint_\Omega \delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)\varphi(x,y)|J|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由于$\varphi(x_0,y_0)=\bar{\varphi}(\xi_0,\eta_0)$，故有

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega \delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)|J|\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint_\Omega \delta(x-x_0,y-y_0)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\end{aligned}$$

即

$$\delta(x-x_0,y-y_0)=\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)|J|, \tag{1.36}$$

从而(1.33)获证.

1.4 共轭微分算子和广义解

由1.2段中所述Green函数的性质4°知，$G(x_0,x)$对x的一阶导数在点$x=x_0$处有跳跃间断，故作为定解问题在整个区间[0,1]上的解是不符合古典解的定义的.因为古典解要求能在区间(0,1)内部二次连续可微，所以这只能是某种意义下的广义解.为此我们先引进共轭微分算子的概念，再借此来定义广义解.

定义 5 考虑一般的二阶线性常微分算子

$$L=-a(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+b(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+c(x); \tag{1.37}$$

其中$a(x)$、$b(x)$、$c(x)$都是定义在$[a,b]$上已知的充分光滑的实函数.

如果算子L^*满足关系式

$$\int_a^b (\varphi L\psi - \psi L^* \varphi)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \varphi、\psi \in \mathscr{D}(a,b), \tag{1.38}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(a,b) &= \{\varphi(x) | \varphi \in C^\infty(a,b),\ \text{且在} a、b \text{附近} \varphi \equiv 0\} \\ &= C_0^\infty(a,b),\end{aligned}$$

则称算子L^*为L的共轭微分算子.

定理 1 算子L的共轭微分算子L^*的表达式为

$$L^* = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b(x) + c(x). \tag{1.39}$$

证明 通过直接计算,可得

$$\begin{aligned}&\int_a^b (\varphi L\psi - \psi L^* \varphi)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b [-(a(x)\varphi\psi')' + (\psi(a(x)\varphi)')' + (b(x)\varphi\psi)']\mathrm{d}x \\ &= [-a(x)\varphi\psi' + \psi(a(x)\varphi)' + b(x)\varphi\psi]\Big|_a^b \\ &= 0, \qquad\qquad \forall \varphi、\psi \in \mathscr{D}(a,b).\end{aligned}$$

故定理得证.

定义6 如果$L^* = L$,则称L为自共轭微分算子.

现在我们借助共轭微分算子的概念来定义定解问题

$$\begin{cases} Ly = f(x) \quad (0 < x < 1), & (1.40) \\ y(0) = y(1) = 0 & (1.41) \end{cases}$$

的广义解.

定义7 如果对任意的$\varphi(x) \in \mathscr{D}(0,1)$,函数$y(x)$满足条件$y(0) = y(1) = 0$及下述积分等式

$$\int_0^1 yL^*\varphi \mathrm{d}x = \int_0^1 f\varphi \mathrm{d}x, \tag{1.42}$$

其中L^*为L的共轭微分算子,则称此函数$y(x)$为定解问题(1.40)、(1.41)的广义解(也称为弱解).

可见通过引进广义解的概念，我们把在原来定解问题中对函数$y(x)$的微商转嫁到对函数$\varphi(x)$的微商，从而降低了对解$y(x)$的光滑性的要求.

现在再回到本节开首所述的弦在单位集中力作用下的物理模型，如果仍要把$G(x_0,x)$表成满足定解问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x) \qquad (0<x<1), & (1.43) \\ y(0)=y(1)=0 & (1.44) \end{cases}$$

的解. 显然这时的外力密度函数$f(x)$就应该是δ函数，即$f(x)=\delta(x-x_0)$. 由前面所知，上述定解问题中微分算子$L=-\dfrac{d^2}{dx^2}$的共轭微分算子$L^*=L$. 所以函数

$$G(x_0,x)=\begin{cases} x(1-x_0), & 0<x<x_0, \\ x_0(1-x), & x_0<x<1 \end{cases} \tag{1.45}$$

满足方程

$$-\frac{d^2y}{dx^2}=\delta(x-x_0) \tag{1.46}$$

的含义，也就是指满足下述关系式

$$\int_0^1 G(x_0,x)\left(-\frac{d^2}{dx^2}\varphi\right)dx=\int_0^1 \delta(x-x_0)\varphi(x)dx$$

$$=\varphi(x_0), \quad \forall \varphi\in\mathscr{D}(0,1). \tag{1.47}$$

即函数$G(x_0,x)$是定解问题(1.43)、(1.44)的一个广义解.

1.5 Green函数的定义与Green公式

现在我们可以对Green函数定义如下:

定义8 满足定解问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}=\delta(x-x_0) \qquad (0<x<1), & (1.48) \\ y(0)=y(1)=0 & (1.49) \end{cases}$$

的广义解$y(x)$称为微分算子$L=-\frac{d^2}{dx^2}$第一边值问题在区间$[0,1]$上的Green函数.记$y(x)=G(x_0,x)$.

为了能用Green函数表出非齐次定解问题的解，我们需要借助于Green公式.

定理2 设L和L^*分别是由(1.37)和(1.39)定义的微分算子及其相应的共轭微分算子.那末有下述等式成立:

$$\int_a^b (\varphi L\psi-\psi L^*\varphi)dx=[-a(x)\varphi\psi'+\psi(a(x)\varphi)'+b(x)\varphi\psi]\Big|_a^b$$

$$\forall \varphi、\psi\in C^2(a,b)\cap C^1[a,b]. \qquad (1.50)$$

式(1.50)称为Green公式.

公式(1.50)的证明参见定理1证明的推导过程.

附注 若(1.37)式中的$b(x)=-\frac{d}{dx}a(x)$,即

$$L=-\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{d}{dx}\right]+c(x).$$

此时$L^*=L$.Green公式可简化为

$$\int_a^b (\varphi L\psi-\psi L\varphi)dx=(-a(x)\varphi\psi'+a(x)\varphi'\psi)\Big|_a^b. \qquad (1.51)$$

现在我们考虑下述非齐次定解问题

$$\begin{cases} Ly=-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=f(x) \quad (0<x<1), & (1.52)\\ y(0)=y_0, \quad y(1)=y_1, & (1.53)\end{cases}$$

其中$p(x)\in C^1[0,1]$,$q(x)$,$f(x)\in C[0,1]$,y_0、y_1是已知常数.把定解问题(1.52)、(1.53)的解用Green函数表出.

考虑定解问题(1.52)、(1.53)相应的定解问题:

$$\begin{cases} Ly=\delta(x-x_0) \qquad (0<x<1), & (1.54)\\ y(0)=0, \quad y(1)=0. & (1.55)\end{cases}$$

它的广义解即为Green函数，记作$G(x_0,x)$.

然后，取 $\varphi(x)=y(x)$ 为定解问题(1.52)、(1.53)的解，取 $\psi(x)=G(x_0,x)$，形式地代入Green公式(1.51).由于 L 为自共轭微分算子，即 $L^*=L$，经化简后得

$$\int_0^1 [y(x)LG(x_0,x)-G(x_0,x)Ly(x)]\mathrm{d}x$$
$$=-p(1)y_1G'_x(x_0,1)+p(0)y_0G'_x(x_0,0).$$

由(1.54)

$$y(x_0)=\langle\delta(x-x_0),y\rangle=\int_0^1 y(x)LG(x_0,x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 G(x_0,x)f(x)\mathrm{d}x-p(1)y_1G'_x(x_0,1)+p(0)y_0G'_x(x_0,0).$$

由此可见，在求得Green函数后，再借助Green公式，就可得到定解问题的解的表达式.回到本节开首的弦振动问题(1.1)、(1.2)，相当于 $p(x)=1$，$q(x)=0$，$y_0=0$，$y_1=0$. 于是有

$$y(x_0)=\int_0^1 G(x_0,x)f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s)\mathrm{d}s.$$

此即(1.5)式.

§2. 位 势 方 程

2.1 共轭微分算子和广义解

现在我们把在§1中的讨论推广到多维情形.考虑下述物理模型:

设有一个各向同性的物体 Ω，其边界曲面 $\partial\Omega$ 上的温度为已知函数 $\varphi(x,y,z)$，物体内部的热源强度为 $f(x,y,z)$. 讨论物体的温度达到稳定状态时的温度场分布 $u(x,y,z)$.

问题归结为求解位势方程的定解问题:

$$\begin{cases} -\nabla\cdot k\nabla u=f & (\Omega), \quad (2.1)\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi, & \quad (2.2)\end{cases}$$

其中$k(x,y,z)$为物体在点$(x,y,z)\in\Omega$处的导热系数，对于各向同性的均匀物体，k取常数值.

为了用Green函数法来求解上述位势方程的定解问题，类似一维情形，我们先引进多维情形的共轭微分算子概念和位势方程定解问题广义解的概念.

定义 9 考虑一般的二阶线性偏微分算子

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x), \tag{2.3}$$

其中$a_{ij}(x)$、$b_i(x)$、$c(x)$是定义在区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$上的已知函数，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.如果算子$L^*$满足关系式

$$\int_{\Omega}(\varphi L\psi-\psi L^*\varphi)\mathrm{d}x=0,\quad \forall\varphi、\psi\in\mathscr{D}(\Omega), \tag{2.4}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(\Omega)&=\{\varphi(x)|\varphi\in C^{\infty}(\Omega),\text{且在}\partial\Omega\text{附近}\varphi\equiv 0\}\\ &=C_0^{\infty}(\Omega),\end{aligned} \tag{2.5}$$

则称算子L^*为L的共轭微分算子.

定理 3 若L^*是由式(2.3)确定的算子L的共轭微分算子，则

$$L^*=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}a_{ij}(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}b_i(x)+c(x). \tag{2.6}$$

证明 通过直接计算，有

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}(\varphi L\psi-\psi L^*\varphi)\mathrm{d}x\\ &=\int_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi\frac{\partial(a_{ij}\varphi)}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(b_i\varphi\psi)}{\partial x_i}\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

应用在数学分析中熟知的Green公式，并注意到φ、$\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$，它们本身连同它们的微商在$\partial\Omega$上为零，即可得

$$\int_\Omega(\varphi L\psi-\psi L^*\varphi)\mathrm{d}x=0.$$

类似一维情形，若$L^*=L$，则称L为自共轭微分算子.

为简单起见，下面取$k=1$，则$-(\nabla\cdot k\nabla)=-\Delta$.考虑下述位势方程边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f \quad (\boldsymbol{\Omega}\subset\mathbf{R}^3), & (2.7)\\ u|_{\partial\Omega}=0. & (2.8)\end{cases}$$

容易验证$-\Delta$是自共轭微分算子.与一维情形类似，我们用转嫁微商的方法来定义定解问题(2.7)、(2.8)在广义意义下的解.

定义 10 如果对任意的函数$\varphi(P)\in\mathscr{D}(\boldsymbol{\Omega})$，函数$u(P)$满足下述积分等式

$$\iiint_\Omega u(-\Delta\varphi)\mathrm{d}P=\iiint_\Omega f\varphi\mathrm{d}P, \tag{2.9}$$

则称函数$u(P)$在广义意义下满足方程(2.7).

2.2 Green函数的定义和物理意义

定义11 满足定解问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\delta(P-P_0), \quad (P、P_0\in\Omega), & (2.10)\\ u|_{\partial\Omega}=0 & (2.11)\end{cases}$$

的广义解$u(P)$，称为算子$-\Delta$的第一边值问题在区域$\boldsymbol{\Omega}$上的Green函数，并记$u(P)=G(P_0,P)$，其中点$P(x,y,z)$、$P_0(x_0,y_0,z_0)\in\boldsymbol{\Omega}$，$\delta(P-P_0)$是三维$\delta$函数.

Green函数$G(P_0,P)$的物理意义是：在点$P_0(x_0,y_0,z_0)\in\boldsymbol{\Omega}$处放置单位点热源，在边界曲面$\partial\Omega$上温度保持为零度的情形下，在区域$\boldsymbol{\Omega}$内点$P(x,y,z)$处所产生的温度分布.

根据定义11，Green函数$G(P_0,P)$满足方程(2.10)的含义为：$G(P_0,P)$满足下述关系式

$$-\iiint_\Omega G(P_0,P)\Delta\varphi\mathrm{d}P=\iiint_\Omega\delta(P-P_0)\varphi(P)\mathrm{d}P$$
$$=\varphi(P_0), \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{\Omega}). \tag{2.12}$$

2.3 Green公式

为了用Green函数法求解位势方程的定解问题，除了求出相应的Green函数，也需要借助于Green公式.

定理 4 设区域$\boldsymbol{\Omega}$的边界$\partial\boldsymbol{\Omega}$分段光滑，函数$u(P)$、$v(P)\in C^2(\boldsymbol{\Omega})\cap C^1(\bar{\boldsymbol{\Omega}})$. 则有等式

$$\int_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}P=\oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \tag{2.13}$$

成立.其中$\boldsymbol{n}$是边界$\partial\boldsymbol{\Omega}$的外法向.

式(2.13)称为Green公式.

证明 由于

$$u\Delta v=\nabla\cdot(u\nabla v)-\nabla u\cdot\nabla v,$$

因此

$$u\Delta v-v\Delta u=\nabla\cdot(u\nabla v-v\nabla u).$$

上式两边在区域$\boldsymbol{\Omega}$上积分，然后利用微积分学中的Green公式，即得式(2.13).

现在我们以Poisson方程第一边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(P) \qquad (P\in\boldsymbol{\Omega}), & (2.14)\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(P) & (2.15)\end{cases}$$

为例，其中$\boldsymbol{\Omega}\subset\mathbf{R}^n\ (n=2,3)$，为有界区域.

设$u(P)$为定解问题(2.14)、(2.15)的解，取$v(P)=G(P_0,P)$，即满足特殊的边值问题

$$\begin{cases}-\Delta G(P_0,P)=\delta(P-P_0) \qquad (P,P_0\in\boldsymbol{\Omega}), & (2.16)\\ G|_{\partial\Omega}=0. & (2.17)\end{cases}$$

然后形式地代入Green公式(2.13)，得

$$\int_{\Omega}[u(-\Delta G)+G(-f)]\mathrm{d}P=\oint_{\partial\Omega}\left(-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

由广义函数定义

$$\int_{\Omega}u(-\Delta G)\mathrm{d}P=\int_{\Omega}u(P)\delta(P-P_0)\mathrm{d}P=u(P_0),$$

故有

$$u(P_0)=\int_{\Omega} G(P_0,P)f(P)\mathrm{d}P-\oint_{\partial\Omega}\varphi(P)\frac{\partial G(P_0,P)}{\partial n}\mathrm{d}s. \qquad (2.18)$$

由此可见，如果定解问题(2.14)、(2.15)的解$u(P)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，则它可借助于Green函数$G(P_0,P)$用非齐次项$f(P)$和边值$\varphi(P)$表示出来.

2.4 Green函数的结构与基本解

为了求得Green函数$G(P_0,P)$，即定解问题

$$\begin{cases} -\Delta G(P_0,P)=\delta(P-P_0) & (P、P_0\in\Omega), \\ G|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

在广义意义下的解，我们先分析一下Green函数的结构. 函数$G(P_0,P)$可分解为奇性部分$\Gamma(P_0,P)$和正则部分$g(P_0,P)$，即

$$G(P_0,P)=\Gamma(P_0,P)+g(P_0,P). \qquad (2.19)$$

其中$\Gamma(P_0,P)$在整个空间$\mathbf{R}^n$ $(n=2或3)$上满足方程

$$-\Delta\Gamma(P_0,P)=\delta(P-P_0), \qquad (2.20)$$

称$\Gamma(P_0,P)$为Laplace方程的基本解. 而$g(P_0,P)$则满足一个特殊的定解问题

$$\begin{cases} -\Delta g(P_0,P)=0 & (P、P_0\in\Omega), \qquad (2.21) \\ g|_{\partial\Omega}=-\Gamma|_{\partial\Omega}. & \qquad (2.22) \end{cases}$$

要求得基本解$\Gamma(P_0,P)$，我们可以采用下述的初等方法. 为确定起见，取$P_0=0$，$n=3$，即把点热源放置在三维空间$\mathbf{R}^3$的坐标原点. 把方程(2.20)改写为

$$-\Delta u=\delta(P) \qquad (P\in\mathbf{R}^3). \qquad (2.23)$$

从物理上讲，在各向同性均匀的物体内，这个点源的影响必然只是径向r的函数，即$u=u(r)$. 这时有

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right). \qquad (2.24)$$

为了表述位于原点的单位点热源，我们环绕原点截取一个以

ε为半径的球B_ε，设n为球面∂B_ε的外法向，则通过球面∂B_ε进入物体Ω的热量是

$$\oint_{\partial B_\varepsilon}(q\cdot n)\mathrm{d}s. \tag{2.25}$$

由Fourier定律知，热流量$q=-k\nabla u$，其中k是物体的导热系数，为简单起见，不妨取$k=1$。于是，位于原点的单位点热源可以表述为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\partial B_\varepsilon}\left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\partial B_1}\left(-\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=\varepsilon}\right)\mathrm{d}\omega=1. \tag{2.26}$$

其中∂B_1为单位球面，由于u只是r的函数，故有

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)=0 \quad (r>0), & (2.27)\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=\varepsilon}=-\dfrac{1}{4\pi}. & (2.28)\end{cases}$$

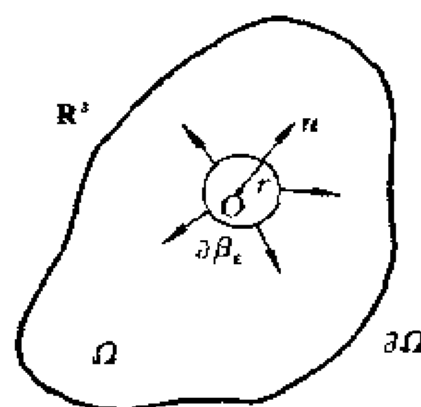


图 1-4

方程(2.27)的通解为$u(r)=\dfrac{c_1}{r}+c_2$。由条件(2.28)应有$c_1=\dfrac{1}{4\pi}$。不计常数c_2，得三维Laplace方程的基本解为

$$u=\frac{1}{4\pi r} \tag{2.29}$$

对于一般情形$P_0\neq 0$时，可作坐标平移变换，在新的坐标系中使点热源置于原点，它的结果已在上面解出，然后再把坐标系变换回原来的坐标。这样可求得方程(2.20)的解

$$\Gamma(P_0,P)=\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}$$
$$=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}. \tag{2.30}$$

于是，Green函数

$$G(P_0, P)=\frac{1}{4\pi r_{P_0P}}+g(P_0, P). \tag{2.31}$$

当$n=2$时，类似地可求得二维Laplace方程的基本解为

$$\Gamma(P_0, P)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{P_0P}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}. \tag{2.32}$$

2.5　第二边值问题的Green函数

对于Poisson方程第二边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(P) & (P\in\Omega), & (2.33)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\varphi(P) & & (2.34)\end{cases}$$

是否也有可能如同第一边值问题构造相应的Green函数呢？即是否能求出满足定解问题

$$\begin{cases}-\Delta G(P_0, P)=\delta(P-P_0) & (P\in\Omega), & (2.35)\\ \dfrac{\partial}{\partial n}G(P_0, P)=0 & (P\in\partial\Omega) & (2.36)\end{cases}$$

的函数$G(P_0, P)$？

通过对方程(2.35)两边在区域Ω上求积分，并利用Green公式(2.13)，得

$$\text{左边}=\int_\Omega -\Delta G(P_0, P)\mathrm{d}P=-\oint_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s=0,$$

$$\text{右边}=\int_\Omega \delta(P-P_0)\mathrm{d}P=1.$$

可见这样的Green函数$G(P_0, P)$是不存在的.因而，对第二边值问题需要把Green函数的定义稍作修改.

定义12　满足定解问题

$$
\begin{cases}
-\Delta G(P_0, P)=\delta(P-P_0)-c & (P\in\Omega), \quad (2.37)\\
\left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0 & \quad (2.38)
\end{cases}
$$

的广义解$G(P_0, P)$，称为Laplace算子第二边值问题在区域Ω上的Green函数，其中c为常数.

从定解问题在热传导中的物理意义，即从热平衡的观点来看：当边界$\partial\Omega$绝热时，需要引进一个"汇"(负的热源)，使得由点热源产生的热量被完全吸收.根据第二边值问题有解的相容性条件，应有

$$\int_{\Omega}\delta(P-P_0)\mathrm{d}P-\int_{\Omega}c\mathrm{d}P=0,$$

即

$$c=\frac{1}{\mathrm{mes}\,\Omega}, \tag{2.39}$$

其中$\mathrm{mes}\,\Omega$表示区域Ω的体积(面积).

类似于第一边值问题的情形，我们把第二边值问题的Green函数分解为两部分

$$G(P_0, P)=\Gamma(P_0, P)+g(P_0, P),$$

其中奇性部分$\Gamma(P_0, P)$仍是Laplace方程的基本解，但此时的正则部分$g(P_0, P)$应满足的特殊定解问题为

$$
\begin{cases}
\Delta g(P_0, P)=c & (P、P_0\in\Omega), \quad (2.40)\\
\left.\dfrac{\partial g}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=-\left.\dfrac{\partial \Gamma}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}. & \quad (2.41)
\end{cases}
$$

回到定解问题(2.33)、(2.34)，如果相容性条件

$$\int_{\Omega}f(P)\mathrm{d}P=-\oint_{\partial\Omega}\varphi(P)\mathrm{d}s \tag{2.42}$$

成立，在Green公式(2.13)中取$u(P)$为定解问题(2.33)、(2.34)的解，$v=G(P_0, P)$是定解问题(2.37)、(2.38)的解，得

$$-\int_{\Omega}(u\Delta G+Gf)\mathrm{d}P=\oint_{\partial\Omega}G\varphi\mathrm{d}s,$$

即有

$$u(P_0)=\int_{\Omega}u(P)\delta(P-P_0)\mathrm{d}P$$

$$=\int_{\Omega}G(P_0,P)f(P)\mathrm{d}P+\oint_{\partial\Omega}G(P_0,P)\varphi(P)\mathrm{d}s+c^*, \quad (2.43)$$

其中

$$c^*=\frac{1}{\mathrm{mes}\,\Omega}\int_{\Omega}u(P)\mathrm{d}P \quad (2.44)$$

是一个常数.

§3. Green函数的求法

本节我们就一些特殊区域上Laplace方程的第一、第二边值问题的Green函数介绍几种求法.

3.1 镜象法

镜象法的基本思想从数学上讲，就是利用奇、偶函数的性质把区域适当地对称开拓到全平面(空间)，而使当所求得的解限制在原区域时，它自然满足所给定的边界条件. 由于奇函数在对称轴上函数值为零，即由$f(x)=-f(-x)$可推得$f(0)=0$;偶函数在对称轴上的微商值为零，即由$f(x)=f(-x)$可推得$f'(0)=0$. 从而可把有界或半无界区域上的边值问题转化为全平面(空间)上没有边界条件的问题. 从物理意义上讲，就是在物体外部虚设一些点源(汇)，使得它们连同原来设置在物体内部的点源一起在全平面(空间)所产生的温度场(电场)恰好使物体表面上的温度(电位)或热流量(电流量)等于零.

例 1 求二维Laplace算子第一边值问题在上半平面的Green函数，即求解定解问题:

$$\begin{cases} -\Delta u=\delta(x-x_0,y-y_0) & (-\infty<x<+\infty, y>0), & (3.1)\\ u|_{y=0}=0 & (-\infty<x<+\infty), & (3.2)\\ \lim\limits_{r\to\infty}|u(x,y)|<+\infty & (r=\sqrt{x^2+y^2}). & (3.3)\end{cases}$$

解 按边界条件(3.2)，我们以坐标轴$y=0$为对称轴，在与点$P_0(x_0, y_0)$对称的点$P'_0(x_0, -y_0)$处设置一个“汇”(见图1－5)．在图中用“Δ”表示“源”，用“回”表示“汇”．源与汇的大小都是一个单位，但正负号相反．从数学意义上讲，即把未知函数$u(x, y)$关于坐标轴$y=0$奇开拓到全平面，保持在对称轴$y=0$上函数值为零．于是在拓展后的全平面上，函数u应满足

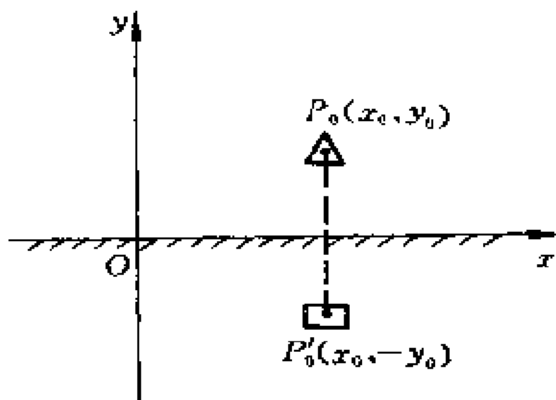


图 1-5

$$-\Delta u=\delta(x-x_0, y-y_0)-\delta(x-x_0, y+y_0), \qquad (x, y)\in\mathbf{R}^2.$$

令$u=u_1+u_2$，其中u_1、u_2分别满足

$$-\Delta u_1=\delta(x-x_0, y-y_0), \qquad (x, y)\in\mathbf{R}^2,$$

$$-\Delta u_2=-\delta(x-x_0, y+y_0), \qquad (x, y)\in\mathbf{R}^2.$$

这是在整个二维空间$\mathbf{R}^2$上的问题，没有边界条件．它们的解就是二维Laplace方程的基本解，分别为

$$u_1=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}+c_1,$$

$$u_2=\frac{-1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}+c_2.$$

于是

$$u=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}+c.$$

再由边界条件$u|_{y=0}=0$，应有$c=0$．容易看出，条件$\lim\limits_{r\to\infty}|u(x, y)|<+\infty$也得到满足，故所求的Green函数为

$$u=G(P_0, P)=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}. \qquad (3.4)$$

例2 求二维Laplace算子在1/4平面区域上混合边值问题的Green函数，即求解定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\delta(x-x_0,y-y_0) & (x>0,y>0), & (3.5)\\ u|_{y=0}=0 & (x\geqslant 0), & (3.6)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0 & (y\geqslant 0) & (3.7)\end{cases}$$

的有界解.

解 按边界条件(3.6)，我们先取$y=0$为对称轴. 在与点$P_0(x_0,y_0)$的对称点$P_0'(x_0,-y_0)$处设置一个"汇"，再按边界条件(3.7)，取$x=0$为对称轴，在与点P_0、P_0'对称的点$P_1(-x_0,y_0)$和$P_1'(-x_0,-y_0)$处分别设置一个"源"和一个"汇"，如图1-6所示. 从数学意义上讲，即把未知函数$u(x,y)$先关于坐标轴$y=0$奇开拓到右半平面，再关于坐标轴$x=0$偶开拓到全平面. 从而保证了在对称轴$y=0$上函数值为零，在对称轴$x=0$上函数的偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$为零. 于是，在开拓后的全平面上

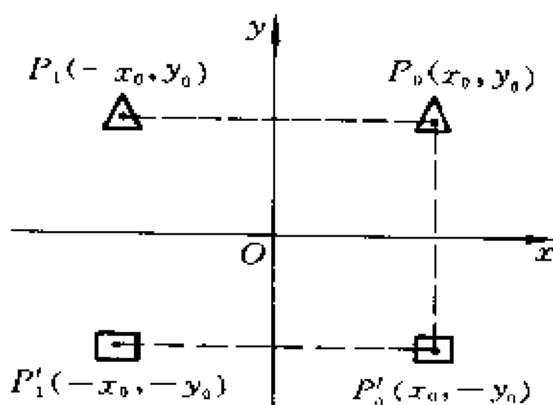


图 1-6

$$-\Delta u=\delta(P-P_0)-\delta(P-P_0')+\delta(P-P_1)-\delta(P-P_1').$$

类似例1的解法，可得

$$\begin{aligned}u&=G(P_0,P)\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{PP_0}}-\ln\frac{1}{r_{PP_0'}}+\ln\frac{1}{r_{PP_1}}-\ln\frac{1}{r_{PP_1'}}\right)\\&=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2][(x+x_0)^2+(y+y_0)^2]}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2][(x+x_0)^2+(y-y_0)^2]}\end{aligned}\tag{3.8}$$



例3 求二维Laplace算子第一边值问题在圆域内的Green函

数，即求解定解问题：

$$\begin{cases} -\Delta u=\delta(P-P_0), & P,P_0\in\Omega, \quad (3.9)\\ u|_{\partial\Omega}=0. & \quad (3.10)\end{cases}$$

其中区域$\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2<a^2\}$.

解 取点$P_0(x_0,y_0)$关于圆周$\partial\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2=a^2\}$的对称点$P_0^*$，即在射线$OP_0$的延长线上找一点$P_0^*$，使得

$$|\overline{OP_0^*}|\cdot|\overline{OP_0}|=a^2,$$

见图1－7.

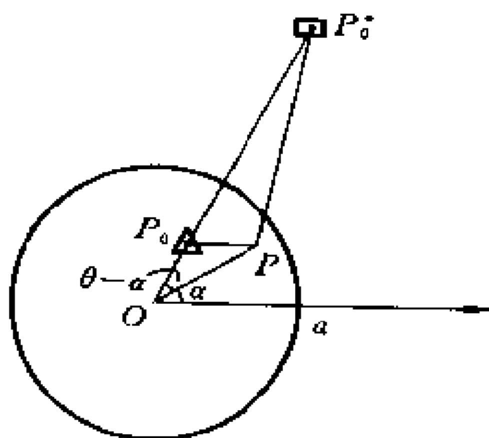


图 1－7

然后，在点P_0^*处设置一个“汇”.拓展成全平面上的问题：

$$-\Delta u=\delta(P-P_0)-\delta(P-P_0^*) \qquad (P\in\mathbf{R}^2),$$

解得

$$u=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_0}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_0^*}}+\frac{1}{4\pi}\ln c.$$

为确定常数c，取极坐标系．设点$P(r,\alpha)$，$P_0(\rho,\theta)$，则点P_0^*的坐标为$\left(\frac{a^2}{\rho},\theta\right)$．而

$$|\overline{PP_0}|^2=\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha),$$

$$|\overline{PP_0^*}|^2=\frac{a^4}{\rho^2}+r^2-2\frac{a^2}{\rho}r\cos(\theta-\alpha),$$

故

$$u=\frac{1}{4\pi}\ln\left\{\frac{a^4+\rho^2r^2-2a^2\rho r\cos(\theta-\alpha)}{\rho^2[\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha)]}\cdot c\right\}.$$

为满足边界条件$u|_{\partial\Omega}=0$，即$u|_{r=a}=0$，应有

$$\frac{a^4+\rho^2a^2-2a^3\rho\cos(\theta-\alpha)}{\rho^2[\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)]}\cdot c=1.$$

推得

$$c=\frac{\rho^2}{a^2}.$$

于是，得到圆域内的Green函数为

$$u=G(P_0,P)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{a^4+\rho^2r^2-2a^2\rho r\cos(\theta-\alpha)}{a^2[\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\alpha)]}. \quad (3.11)$$

类似于例1、例2拓展的方法，可以求得半圆或1/4圆域内的Green函数.

例4 求二维Laplace算子第二边值问题在单位圆内的Green函数.按§2中的定义12，即求解定解问题：

$$\begin{cases} -\Delta u=\delta(P-P_0)-\dfrac{1}{\pi} & (P、P_0\in\Omega), \quad (3.12)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0 & (r=\sqrt{x^2+y^2}), \quad (3.13)\end{cases}$$

其中区域$\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$.

解 设点P_0在Oxy平面上的坐标为(x_0,y_0)，且$x_0=r\cos\alpha$，$y_0=r\sin\alpha$(其中$r=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$).可以先作绕坐标原点O的旋转变换

$$\begin{cases} x'=x\sin\alpha-y\cos\alpha, \\ y'=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \end{cases} \quad (3.14)$$

将点P_0变换到$Ox'y'$平面上的点$P_0'(0,y_0')$，其中$y_0'=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，而Oxy平面上的单位圆$x^2+y^2\leqslant1$映射到$Ox'y'$平面上仍为单位圆$x'^2+y'^2\leqslant1$.

为书写简单起见，我们仍采用Oxy平面，且不妨设点P_0的坐标为$(0,y_0)$.取点P_0关于单位圆周$x^2+y^2=1$的对称点$P_0^*\left(0,\dfrac{1}{y_0}\right)$.在点$P_0^*$处设置一个"源"，如图1－8所示.

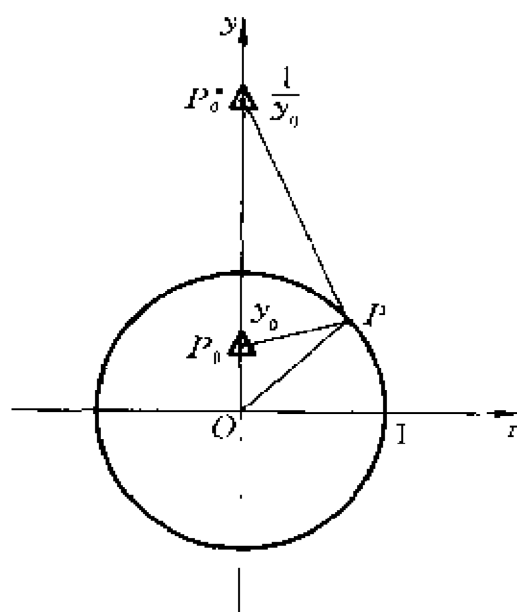


图 1－8

则在拓展后的全平面上

$$-\Delta u=\delta(P-P_0)+\delta(P-P_0^*)-\frac{1}{\pi}.$$

令u为具有如下形式的径向解

$$u=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_0}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_0^*}}+\frac{x^2+y^2}{4\pi}+c,\qquad(3.15)$$

其中c是任意常数，为确定起见，取$c=0$.

我们有

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{r_{PP_0}}\right)\Big|_{r=1}=-\frac{1}{r_{PP_0}^2}[x\cos(n,x)+(y-y_0)\cos(n,y)]\Big|_{r=1}$$

$$=-\frac{1-y_0y}{r_{PP_0}^2}\Big|_{r=1},$$

类似地，有

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{r_{PP_0^*}}\right)\Big|_{r=1}=-\frac{1-y_0^*y}{r_{PP_0^*}^2}\Big|_{r=1},$$

其中$y_0^*=\dfrac{1}{y_0}$.当$P\in\partial\Omega$时，因为$\Delta OP_0P\sim\Delta OPP_0^*$(见图1－8)，故有

$$\frac{r_{PP_0}}{r_{PP_0^*}}=\frac{|\overline{OP_0}|}{|\overline{OP}|}=\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP_0^*}|},$$

$$\therefore\qquad\frac{r_{PP_0}}{r_{PP_0^*}}\Big|_{r=1}=y_0.$$

于是有

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{r_{PP_0}}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{r_{PP_0^*}}\right)\right]\Big|_{r=1}$$

$$=-\frac{1}{r_{PP_0}^2}(1-2y_0y+y_0^2)|_{r=1}=-1.$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}=0.$$

即u满足边界条件(3.13).故Green函数

$$u=G(P_0,P)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP^*}}+\frac{1}{4\pi}(x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{x^2+y^2+\ln\frac{y_0^2}{[x^2+(y-y_0)^2][x^2y_0^2+(yy_0-1)^2]}\right\}. \quad (3.16)$$

如果点P_0的坐标为(x_0,y_0)，则根据坐标变换式(3.14)，应把(3.16)式中的x换以$x\sin\alpha-y\cos\alpha$，y换以$x\cos\alpha+y\sin\alpha$，其中$\alpha=\arctan\frac{y_0}{x_0}$，而把$y_0$换以$\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，即得所要求的Green函数.

例5 求二维Laplace算子在无穷长带形区域上第二边值问题的Green函数.即求解定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\delta(P-P_0) & (P、P_0\in\Omega), & (3.17)\\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm\frac{a}{2}}=0 & (-\infty<y<+\infty), & (3.18)\\ \lim\limits_{y\to\infty}|u(x,y)|<+\infty, & & (3.19)\end{cases}$$

其中区域$\Omega=\{(x,y)|-\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2},-\infty<y<+\infty\}$，点$P_0$坐标为$(\alpha,\beta)$，$|\alpha|<\frac{a}{2}$.

解 我们可以通过坐标变换

$$\begin{cases} x'=\begin{cases}\frac{a}{a+2\alpha}(x-\alpha), & -\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\alpha;\\ \frac{a}{a-2\alpha}(x-\alpha), & \alpha<x\leqslant\frac{a}{2},\end{cases} \\ y'=y. \end{cases} \quad (3.20)$$

把Oxy平面上的点$P_0(\alpha,\beta)$，其中$|\alpha|<\frac{a}{2}$，映射到$Ox'y'$平面上的点$P_0'(0,\beta)$，而无穷长带形区域Ω映射到$Ox'y'$平面上仍是无穷长的

带形区域Ω'.

$$\Omega'=\{(x',y')|-\frac{a}{2}<x'<\frac{a}{2},\quad -\infty<y'<+\infty\},$$

见图1－9.

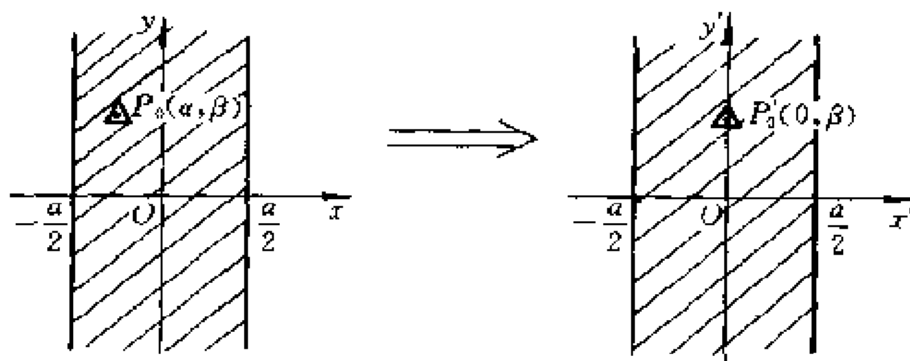


图 1 -9

为书写简单起见，我们仍采用Oxy平面，且不妨假定点P_0的坐标为$(0,b)$.根据镜象法的启示，将上述无穷长带形区域Ω上的函数$u(x,y)$偶周期开拓到全平面，以保证边界条件(3.18)得到满足.从物理意义上讲，即在点$(\pm na,b)(n=1,2,\cdots)$处与在点$P_0(0,b)$处一样也各设置一个“源”.如图1－10所示.

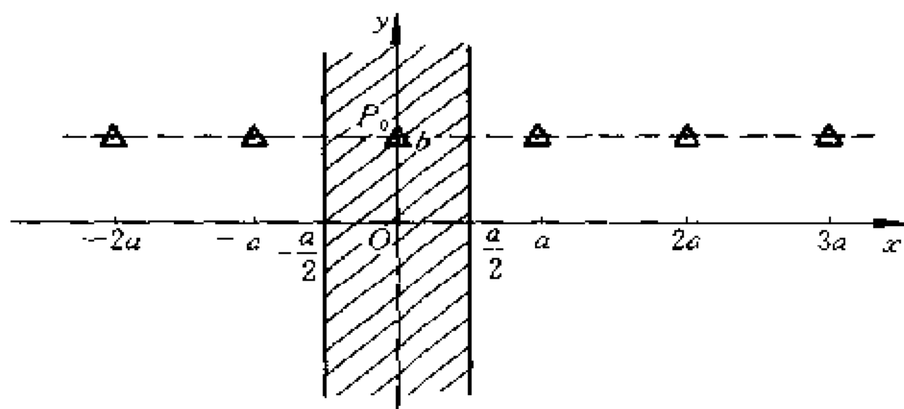


图 1 10

那么在拓展后的全平面上有

$$-\Delta u=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-na,y-b).$$

我们仍然设法采用点源解叠加的办法，即把u表成

$$u=-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\ln[(x-na)^2+(y-b)^2]+c_n\right\}. \qquad (3.21)$$

其中c_n为待定常数，但容易看出这个级数一般来说并不一定收敛。现在的问题是有没有可能适当选取c_n，使得这个级数是收敛的。为此把级数改写为

$$u=c_0-\frac{1}{4\pi}\ln[x^2+(y-b)^2]$$

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ln\Big([(x+na)^2+(y-b)^2][(x-na)^2+(y-b)^2]\Big)+c_n\right\},$$

$$(3.22)$$

令

$$F_n(x,y)=\ln\Big([(x+na)^2+(y-b)^2][(x-na)^2+(y-b)^2]\Big).$$

$$(3.23)$$

根据收敛级数的性质知，若上述级数收敛，它的一般项应趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}[F_n(x,y)+c_n]=0. \qquad (3.24)$$

由于函数$F_n(x,y)$当$n\to\infty$时，对于固定的(x,y)它的阶数为$\ln n^4a^4$，因此若取

$$c_n=-\ln n^4a^4, \qquad (3.25)$$

则极限等式(3.24)成立。于是函数$u(x,y)$可以表示为

$$u(x,y)=c_0-\frac{1}{4\pi}\ln[x^2+(y-b)^2]$$

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left\{1+\frac{2[-x^2+(y-b)^2]}{n^2a^2}+\frac{[x^2+(y-b)^2]^2}{n^4a^4}\right\}.$$

$$(3.26)$$

因为当$x>0$时，$0<\ln(1-x)<x$，故

$$\ln\left\{1+\frac{2[-x^2+(y-b)^2]}{n^2a^2}+\frac{[x^2+(y-b)^2]^2}{n^4a^4}\right\}\leqslant\frac{c_{xy}}{n^2a^2}.$$

这里c_{xy}表示一个依赖于(x,y)而与n无关的常数. 由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{xy}}{n^2a^2}$是一个收敛级数, 因此式(3.26)中的级数除了点$(\pm na, b)(n=1,2,\cdots)$外收敛, 且是$(x,y)$的连续函数. 相仿地可以证明这个级数可以对变量$x$、$y$逐项微商两次, 并适合Laplace方程. 至于满足边界条件(3.18)则是显然的.

对于一般情形的点$P_0(\alpha,\beta)$, 只需把式(3.26)中的x、y看作x'、y', 再根据坐标变换式(3.20)换到Oxy平面, 并把b换以β, 即得所要求的Green函数

$$
\begin{aligned}
u(x,y)=c_0&-\frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{a^2}{(a+2\alpha)^2}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]\\
&-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left\{1+\frac{2[-a^2(x-\alpha)^2+(a+2\alpha)^2(y-\beta)^2]}{(a+2\alpha)^2n^2a^2}\right.\\
&\left.+\frac{[a^2(x-\alpha)^2+(a+2\alpha)^2(y-\beta)^2]^2}{(a+2\alpha)^4n^4a^4}\right\}\\
&\left(-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\alpha\right),
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

或

$$
\begin{aligned}
u(x,y)=c_0&-\frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{a^2}{(a-2\alpha)^2}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]\\
&-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left\{1+\frac{2[-a^2(x-\alpha)^2+(a-2\alpha)^2(y-\beta)^2]}{(a-2\alpha)^2n^2a^2}\right.\\
&\left.+\frac{[a^2(x-\alpha)^2+(a-2\alpha)^2(y-\beta)^2]^2}{(a-2\alpha)^4n^4a^4}\right\}\\
&\left(\alpha<x\leqslant\frac{a}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

3.2 保角变换法

保角变换法只能适用于二维问题. 由复变函数论知, 若$w=f(z)$

为复平面上区域D内的解析函数，$z=x+\mathrm{i}y$，$w=\xi+\mathrm{i}\eta$，则$\xi(x,y)$、$\eta(x,y)$在该区域内适合Cauchy－Riemann方程，即

$$\xi_x=\eta_y, \quad \xi_y=-\eta_x, \tag{3.29}$$

从而它们分别满足Laplace方程，即$\Delta\xi=0$，$\Delta\eta=0$。

当$f'(z)\neq 0$时，函数$w=f(z)$是z平面到w平面的保角映射，相当于作实函数变换

$$\xi=\xi(x,y), \quad \eta=\eta(x,y). \tag{3.30}$$

在上述变换下，Laplace算子$\Delta_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$与$\Delta_{\xi\eta}=\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$之间有关系式

$$\Delta_{xy}u=|f'(z)|^2\Delta_{\xi\eta}u, \tag{3.31}$$

而δ函数在变换(3.30)下有关系式(见§1.1.3)

$$\delta(x-x_0, y-y_0)=|J|\delta(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0), \tag{3.32}$$

其中J为Jacobi式，即

$$J=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}. \tag{3.33}$$

利用式(3.29)，可推得

$$J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x=\xi_x^2+\eta_x^2=|f'(z)|^2. \tag{3.34}$$

例6 求二维Laplace算子第一边值问题在任意单连通区域$\boldsymbol{\Omega}$上的Green函数，即求解定解问题：

$$\begin{cases} -\Delta u=\delta(x-x_0, y-y_0), & (x,y)\in\boldsymbol{\Omega}, & (3.35)\\ u=0, & (x,y)\in\partial\boldsymbol{\Omega}. & (3.36)\end{cases}$$

解 根据Riemann定理，对任何单连通区域$\boldsymbol{\Omega}$，都存在一个保角映射$w=f(z)$($|f'(z)|\neq 0$)，把它变成单位圆B_1，且使得任意一点$P_0\in\boldsymbol{\Omega}$映射成单位圆$B_1$的圆心。

由式(3.31)－(3.34)可知，定解问题(3.35)、(3.36)转化为

$$\begin{cases} -\Delta_{\xi\eta}u=\delta(\xi,\eta), & (\xi,\eta)\in B_1, & (3.37)\\ u=0, & (\xi,\eta)\in\partial B_1. & (3.38)\end{cases}$$

于是，可求得Green函数

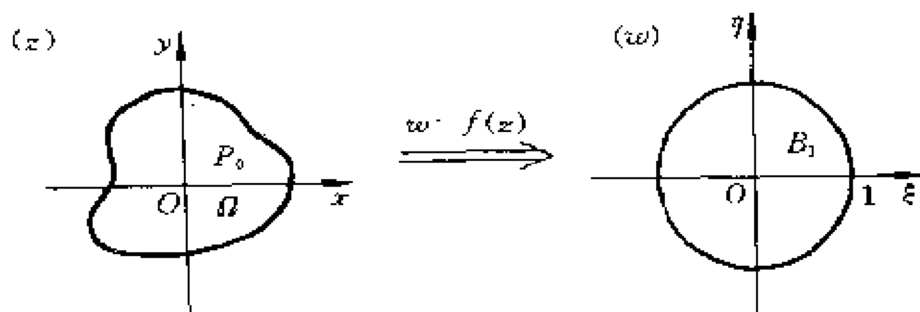


图 1－11

$$u=G(P_0,P)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w|}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z)|}. \tag{3.39}$$

在实际应用中要找出保角变换$w=f(z)$常常是较困难的，但是对许多较特殊的区域，我们可通过查保角变换表求得.

例 7 求二维Laplace算子第一边值问题在无限长带形区域$0<y<\pi$内的Green函数，即求解定解问题:

$$\begin{cases}-\Delta u=\delta(x-x_0,y-y_0) & (-\infty<x<+\infty,0<y<\pi), \quad (3.40)\\ u|_{y=0}=u|_{y=\pi}=0 & (-\infty<x<+\infty), \quad (3.41)\\ \lim\limits_{x\to\infty}|u(x,y)|<+\infty & (0\leqslant y\leqslant\pi). \quad (3.42)\end{cases}$$

解 为了把无限长的带形区域映射成单位圆，可以分两步走. 首先作映射$\zeta=e^z$，将所给的带形域映射成ζ平面上的上半平面$\mathrm{Im}(\zeta)>0$，点$P_0(x_0,y_0)$映射成ζ平面上的点ζ_0；再作映射$w=\dfrac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\bar{\zeta}_0}$，将上半平面$\mathrm{Im}(\zeta)>0$映射成$w$平面上的单位圆$|w|<1$，点$\zeta_0$映射成$w$平面上的坐标原点.见图1－12所示.

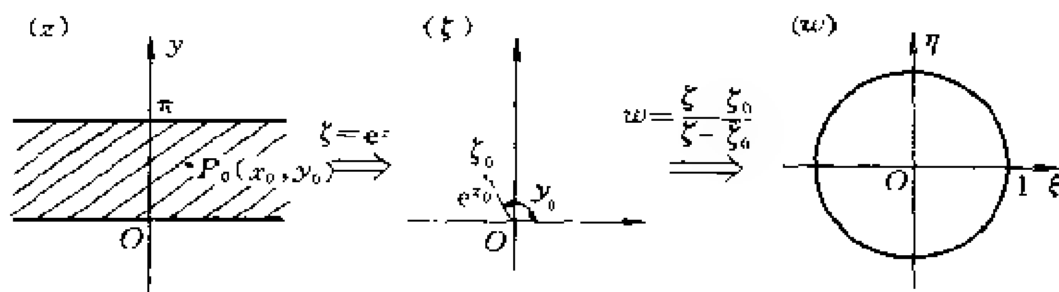


图 1－12

把上述两个映射复合起来，就得所求的映射

$$
\begin{aligned}
w&=\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\bar{\zeta}_0}=\frac{e^z-e^{z_0}}{e^z-e^{\bar{z}_0}}\\
&=\frac{e^x\cos y+ie^x\sin y-e^{x_0}\cos y_0-ie^{x_0}\sin y_0}{e^x\cos y+ie^x\sin y-e^{x_0}\cos y_0+ie^{x_0}\sin y_0}.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

在此映射下，定解问题(3.40)—(3.42)转化为

$$
\begin{cases}
-\Delta_{\xi\eta}u=\delta(\xi,\eta) \qquad (\xi^2+\eta^2<1), & (3.44)\\
u|_{\xi^2+\eta^2=1}=0, & (3.45)
\end{cases}
$$

于是可得Green函数

$$
\begin{aligned}
u=G(P_0,P)&=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w|}\\
&=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{e^x\cos y-e^{x_0}\cos y_0+i(e^x\sin y+e^{x_0}\sin y_0)}{e^x\cos y-e^{x_0}\cos y_0+i(e^x\sin y-e^{x_0}\sin y_0)}\right|\\
&=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(e^x\cos y-e^{x_0}\cos y_0)^2+(e^x\sin y+e^{x_0}\sin y_0)^2}{(e^x\cos y-e^{x_0}\cos y_0)^2+(e^x\sin y-e^{x_0}\sin y_0)^2}\\
&=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(x-x_0)-\cos(y+y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0)-\cos(y-y_0)}.
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

§4. 热传导方程

4.1 热传导方程初值问题的基本解

以一维情形为例，考虑下述热传导方程初值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (-\infty<x<+\infty,\ t>0), & (4.1)\\
u|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (-\infty<x<+\infty), & (4.2)
\end{cases}
$$

利用Fourier变换可求得其解，即我们所熟知的Poisson公式

$$
u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi, \tag{4.3}
$$

其中核函数

$$K(x,t;\xi,0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}. \tag{4.4}$$

由§1.1.3中知，当$t\to 0$时

$$K(x,t;\xi,0)\longrightarrow\delta(x-\xi), \tag{4.5}$$

且在形式上

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{4.6}$$

可以验证函数$K(x,t;\xi,0)$满足定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & (-\infty<x<+\infty,t>0), \quad (4.7)\\ u|_{t=0}=\delta(x-\xi). & \quad (4.8)\end{cases}$$

因此，函数$K(x,t;\xi,0)$的物理意义可看作是：由在时刻$t=0$时在点$x=\xi$处的单位点热源$\delta(x-\xi)$，在$t>0$以后时刻所产生的温度分布.于是热源$\delta(x-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$所引起的温度分布应为$K(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$.由于问题是线性的，具有叠加原理.因此，在$t=0$时热源$\varphi(x)$所产生的温度分布应是

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

这在形式上正是Poisson公式(4.3).我们把函数$K(x,t;\xi,0)$称为热传导方程的基本解.

定义13 满足下述方程和初始条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & (-\infty<x<+\infty,t>\tau), \quad (4.9)\\ u|_{t=\tau}=\delta(x-\xi) & (-\infty<x,\xi<+\infty) \quad (4.10)\end{cases}$$

的解，称为一维热传导方程初值问题的基本解.记为$u=\Gamma(x-\xi,t-\tau)$(或$\Gamma(x,t;\xi,\tau)$).

基本解$\Gamma(x-\xi,t-\tau)$的物理意义是：在初始时刻$t=\tau$，在无限长细杆上，点P_0(即$x=\xi$)处放置单位点热源，$t=\tau$以后时刻所产生的温度分布.

当$\tau=0$时的基本解，也可记成$\Gamma(x-\xi,t)$.

$$\Gamma(x-\xi,t)=\begin{cases} K(x,t;\xi,0), & t>0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}H(t), \tag{4.11}$$

其中$H(t)$为单位阶跃函数(也称Heaviside函数),即

$$H(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ 1, & t>0. \end{cases} \tag{4.12}$$

当$\tau>0$时,相应地有

$$\Gamma(x-\xi,t-\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}H(t-\tau). \tag{4.13}$$

从物理意义看,单位点热源$\delta(x-\xi,t-\tau)$所产生的温度分布,等价于在时刻$t=\tau$给定点热源$\delta(x-\xi)$所产生的温度分布.因此定解问题(4.9)、(4.10)的基本解(4.13)也满足下述问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\delta(x-\xi,t-\tau), & (4.14) \\ u|_{t=0}=0. & (4.15) \end{cases}$$

即定解问题(4.14)、(4.15)与(4.9)、(4.10)是等价的.

对于非齐次方程的零初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \quad (-\infty<x<+\infty,t>0), & (4.16) \\ u|_{t=0}=0, & (4.17) \end{cases}$$

其中非齐次项$f(x,t)$是表示无穷长细杆上的热源强度,即在细杆上坐标为x的点处,在时刻t,单位时间内热源可使单位质量的物体的温度值提高$f(x,t)$.根据二维δ函数的定义,在形式上有

$$f(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau, \tag{4.18}$$

亦即可把$f(x,t)$看成是点热源$\delta(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$的叠加.而热源$\delta(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$所产生的温度分布应为

$$\Gamma(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

由问题的线性性质，可利用叠加原理. 因此，由热源强度$f(x,t)$所产生的温度分布，即定解问题(4.16)、(4.17)的解为

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{4.19}$$

于是，对于更一般情形的热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) & (-\infty<x<+\infty,t>0), \quad (4.20)\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (-\infty<x<+\infty), \quad (4.21)\end{cases}$$

根据线性问题的叠加原理，其解可表示为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{4.22}$$

可以验证基本解$\Gamma(x-\xi,t-\tau)$具有如下性质:

1° 当$t>\tau$时，$\Gamma(x-\xi,t-\tau)>0$;

2° $\Gamma(x-\xi,t-\tau)=\Gamma(\xi-x,t-\tau)$;

3° 当$t>\tau$，$-\infty<x<+\infty$时，$\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-\xi,t-\tau)\mathrm{d}\xi=1$;

4° $\forall\varphi(x)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$，有

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=\varphi(x),$$

即

$$\Gamma(x-\xi,t)\longrightarrow\delta(x-\xi)\qquad(t\to 0^+);$$

5° 当$t>\tau$，x、$\xi\in(-\infty,+\infty)$时

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Gamma(x-\xi,t-\tau)=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)\Gamma(x-\xi,t-\tau)=0;$$

6° 当$(x,t)\neq(\xi,\tau)$时，$\Gamma(x-\xi,t-\tau)$无穷次连续可微(当

$t=\tau$, $x\neq\xi$时，$\Gamma(x-\xi,t-\tau)$定义为零)，且有估计

$$|\Gamma(x-\xi,t-\tau)|\leqslant\frac{M}{\sqrt{t-\tau}}\qquad(t>\tau),$$

其中M是大于零的常数.

上述讨论可以推广到多维情形.类似地可定义多维热传导方程初值问题的基本解$\Gamma(P-P_0,t-\tau)$，其中P、$P_0\in\mathbf{R}^n$.

4.2 热传导方程混合问题的Green函数

下面我们对多维情形的热传导方程(第一边界条件)的混合问题引进Green函数的概念.

定义14 满足下述热传导方程(第一边界条件)混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(P,t)-\Delta u(P,t)=0 & (P\in\boldsymbol{\Omega},t>\tau), & (4.23)\\ u(P,t)|_{t=\tau}=\delta(P-P_0) & (P\in\bar{\boldsymbol{\Omega}},P_0\in\boldsymbol{\Omega}), & (4.24)\\ u(P,t)=0 & (P\in\partial\boldsymbol{\Omega},t\geqslant\tau) & (4.25)\end{cases}$$

的解u，称为算子$L=\dfrac{\partial}{\partial t}-\Delta$(第一边界条件)混合问题在区域$\bar{\boldsymbol{\Omega}}$上的Green函数，记作

$$G(P-P_0,t-\tau)\text{或}G(P,t;P_0,\tau).$$

Green函数$G(P-P_0,t-\tau)$的物理意义是：初始时刻$t=\tau$在点P_0处放置单位点热源$\delta(P-P_0)$，边界曲面$\partial\boldsymbol{\Omega}$温度保持为零度的情形下，在区域$\boldsymbol{\Omega}$内的点$P$处时刻$t$所产生的温度分布.

定解问题(4.23)－(4.25)等价于定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(P,t)-\Delta u(P,t)=\delta(P-P_0,t-\tau), & & (4.26)\\ u(P,t)|_{t=0}=0 & (P\in\bar{\boldsymbol{\Omega}}), & (4.27)\\ u(P,t)=0 & (P\in\partial\boldsymbol{\Omega},t\geqslant 0). & (4.28)\end{cases}$$

与位势方程定解问题的Green函数一样，我们需要指出的是：Green函数$G(P-P_0,t-\tau)$仅是在广义意义下适合定解问题(4.23)－

(4.25)(或(4.26)—(4.28))中的方程.由于算子$L=\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$的共轭微分算子为

$$L^*=-\frac{\partial}{\partial t}-\Delta, \tag{4.29}$$

所以Green函数$G(P-P_0, t-\tau)$适合方程(4.26)的含意为满足关系式

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_\Omega G(P-P_0,t-\tau)L^*\varphi(P,t)\mathrm{d}P\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\int_\Omega \delta(P-P_0,t-\tau)\varphi(P,t)\mathrm{d}P\mathrm{d}t\\&=\varphi(P_0,\tau),\qquad \forall\varphi(P,t)\in C_0^\infty(D),\end{aligned} \tag{4.30}$$

其中

$$D=\{(P,t)|P\in\Omega,t>0\}. \tag{4.31}$$

4.3 Green公式与混合问题的解

以一维情形为例.记

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{4.32}$$

并记区域D为

$$D=\{(x,t)|0<x<l,0<t\leqslant T\}, \tag{4.33}$$

以$C^{2,1}(D)$表示在D内关于空间变量x二次连续可微、关于时间变量t一次连续可微的函数全体构成的集合.

设函数$u(x,t)$、$v(x,t)\in C^{2,1}(\bar{D})$,于是有

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^l(vLu-uL^*v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\int_0^l(vu_t-vu_{xx}+uv_t+uv_{xx})\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^l\int_0^T(uv)_t\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x-\int_0^T\int_0^l(vu_{xx}-uv_{xx})\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^l(uv)\Big|_0^T\mathrm{d}x-\int_0^T(vu_x-uv_x)\Big|_0^l\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4.34}$$

式(4.34)称为Green公式．

利用Green公式，我们可以导出一维热传导方程混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) & (0<x<l,t>0), \quad (4.35) \\ u(x,0)=\varphi(x) & (0\leqslant x\leqslant l), \quad (4.36) \\ u(0,t)=g_1(t),u(l,t)=g_2(t) & (t\geqslant 0) \quad (4.37) \end{cases}$$

的解u的表达式．

在Green公式(4.34)中，取$T=t-\varepsilon$，$u(\xi,\tau)=G(x-\xi,t-\tau)$为定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)=\delta(x-\xi,t-\tau), & (4.38) \\ u(x,0)=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant l), & (4.39) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \qquad (t\geqslant 0) & (4.40) \end{cases}$$

的解，则有

$$\int_0^T\int_0^l[G(x-\xi,t-\tau)(u_\tau-u_{\xi\xi})-u(\xi,\tau)(-G_\tau-G_{\xi\xi})]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^l(uG)\Big|_{\tau=0}^{\tau=T}\mathrm{d}\xi-\int_0^T(Gu_\xi-uG_\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l}\mathrm{d}\tau. \qquad (4.41)$$

由于当$\tau<t$时，$-G_\tau-G_{\xi\xi}=0$，而当$\varepsilon\to 0$时，

$$G(x-\xi,0+\varepsilon)\to\delta(x-\xi).$$

利用上述结果，并把式(4.35)代入式(4.41)的左端，u满足的初始条件(4.36)及u、G满足的边界条件(4.37)、(4.40)代入式(4.41)的右端，并令$\varepsilon\to 0$，便得到

$$\int_0^t\int_0^l G(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$=u(x,t)-\int_0^l G(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+\int_0^t[g_2(\tau)G_\xi|_{\xi=l}-g_1(\tau)G_\xi|_{\xi=0}]\mathrm{d}\tau.$$

即一维热传导方程混合问题(4.35)—(4.37)的解为

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_0^l G(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$+\int_0^t\left[g_1(\tau)\frac{\partial G}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}-g_2(\tau)\frac{\partial G}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=l}\right]\mathrm{d}\tau. \tag{4.42}$$

4.4 Green函数的求法

求热传导方程混合问题的Green函数，也就是要解一个特殊的热传导方程混合问题，这个问题只依赖于区域而与方程的非齐次项及定解条件，即初、边值函数无关.我们也可以采用在§3中介绍的镜象法或Fourier方法求得一些特殊区域中的Green函数.下面举例作简要介绍.

一、镜象法

例 1 求一维热传导方程(第一边界条件)混合问题在区间$[0,l]$上的Green函数，即求解定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & (0<x<l,t>0), \quad (4.43)\\ u|_{t=0}=\delta(x-\xi) & (0\leqslant x,\xi\leqslant l), \quad (4.44)\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 & (t\geqslant 0). \quad (4.45)\end{cases}$$

解 将定义在区间$[0,l]$上的函数u奇$2l$周期拓展到无限区间$(-\infty,+\infty)$.在点$x=\xi+2nl(n=\pm1,\pm2,\cdots)$处各设置一个“源”，在点$x=-\xi+2nl(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处各设置一个“汇”，如图1－13所示.

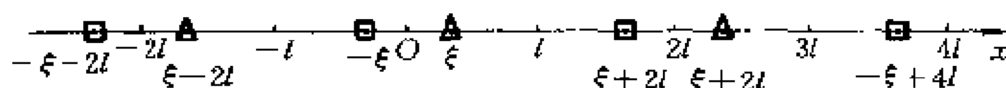


图 1-13

在拓展后的无穷区间$(-\infty,+\infty)$上，$u(x,t)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & (-\infty<x<+\infty,t>0), \quad (4.46)\\ u|_{t=0}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(x-\xi-2nl)-\delta(x+\xi-2nl)]. & \quad (4.47)\end{cases}$$

由于是奇$2l$周期拓展，在点$x=0$和$x=l$处显然保持有$u=0$. 根据热传导方程初值问题基本解的表达式(4.11)，得到所求的Green函数

$$
\begin{aligned}
u &= G(x,t;\xi,0)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4t}}\right]\\
&= \frac{1}{2l}\left[\theta\left(\frac{x-\xi}{2l},\frac{t}{4l^2}\right)-\theta\left(\frac{x+\xi}{2l},\frac{t}{4l^2}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

其中θ函数为

$$
\theta(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-n)^2}{4t}}. \tag{4.49}
$$

我们可以对θ函数的表示式作进一步的化简. 因为它是关于变量x的周期为1的偶函数，按Fourier级数理论它可展开为只含余弦项的Fourier级数，即

$$
\theta(x,t)=\frac{1}{2}a_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cos 2n\pi x.
$$

利用$\theta(x,t)$的表达式可确定系数$a_n(t)(n=0,1,2,\cdots)$:

$$
\begin{aligned}
a_n(t) &= 2\int_0^1 \theta(x,t)\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^1 \cos 2n\pi x\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-n)^2}{4t}}\right]\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{(x-n)^2}{4t}}\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x \qquad (\text{令}y=x-n)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-n}^{-n+1}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\cos 2n\pi y\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\cos 2n\pi y\,\mathrm{d}y \qquad \left(\text{令}z=\frac{y}{2\sqrt{t}}\right)\\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\cos 4n\pi\sqrt{t}z\,\mathrm{d}z\\
&= 2\,\mathrm{e}^{-4n^2\pi^2 t} \qquad (n=0,1,2,\cdots).
\end{aligned}
$$

最后一步我们运用了Laplace积分的已知结果

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}. \tag{4.50}$$

这样，θ函数(4.49)也可以表示成

$$\theta(x,t)=1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-4n^2\pi^2 t}\cos 2n\pi x, \tag{4.51}$$

利用式(4.51)可得Green函数的级数形式

$$\begin{aligned} G(x,t;\xi,0)&=\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}}\left[\cos\frac{n\pi}{l}(x-\xi)-\cos\frac{n\pi}{l}(x+\xi)\right]\\ &=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot H(t). \end{aligned} \tag{4.52}$$

上述级数对于充分大的t，收敛速度是很快的.

例2 求二维热传导方程(第一边界条件)混合问题在半无限长带形区域$\boldsymbol{\Omega}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant l, y\geqslant 0\}$上的Green函数，即求解定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 & (0<x<l, y>0, t>0), \quad (4.53)\\ u|_{t=0}=\delta(x-\xi, y-\eta) & (0\leqslant x\leqslant l, y\geqslant 0), \quad (4.54)\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 & (y\geqslant 0), \quad (4.55)\\ u|_{y=0}=0 & (0\leqslant x\leqslant l). \quad (4.56) \end{cases}$$

解 将定义在上述半无限长带形区域$\boldsymbol{\Omega}$上的函数u先关于直线$y=0$奇开拓到无限长的带形区域

$$\boldsymbol{\Omega}'=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant l, -\infty<y<+\infty\},$$

再按变量x将函数u奇$2l$周期开拓到全平面. 在点$(\xi+2nl,\eta)$及点$(-\xi+2nl,-\eta)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处各设置一个"源"，在点$(-\xi+2nl,\eta)$及点$(\xi+2nl,-\eta)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处各设置一个"汇"，如图1－14所示.

在拓展后的全平面上，函数u满足

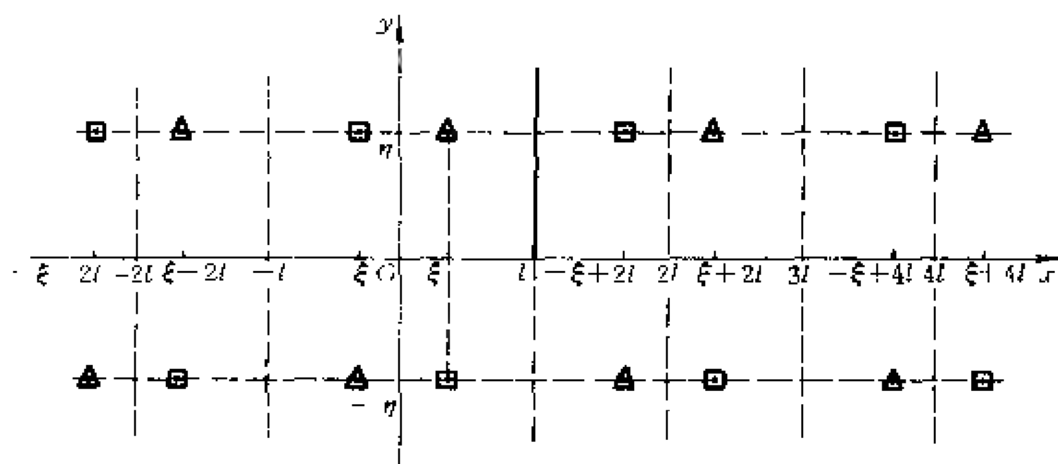


图 1-14

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (-\infty<x、y<+\infty,\ t>0), & (4.57)\\
u\big|_{t=0}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta(x-\xi-2nl,y-\eta)-\delta(x+\xi-2nl,y-\eta) & \\
\qquad -\delta(x-\xi-2nl,y+\eta)+\delta(x+\xi-2nl,y+\eta)]. & (4.58)
\end{cases}
$$

由于是奇拓展，在直线$x=0$、$x=l$和$y=0$上显然保持有$u=0(t>0)$.根据热传导方程初值问题基本解的表达式，即可得所求的Green函数为

$$
\begin{aligned}
u&=G(x-\xi,y-\eta;t)\\
&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi t}\Big[e^{-\frac{(x-\xi-2nl)^2+(y-\eta)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\xi-2nl)^2+(y-\eta)^2}{4t}}\\
&\qquad -e^{-\frac{(x-\xi-2nl)^2+(y+\eta)^2}{4t}}+e^{-\frac{(x+\xi-2nl)^2+(y+\eta)^2}{4t}}\Big]\\
&=\frac{1}{4l\sqrt{\pi t}}\left\{e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4t}}\left[\theta\left(\frac{x-\xi}{2l},\frac{t}{4l^2}\right)-\theta\left(\frac{x+\xi}{2l},\frac{t}{4l^2}\right)\right]\right.\\
&\qquad\left.-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4t}}\left[\theta\left(\frac{x-\xi}{2l},\frac{t}{4l^2}\right)-\theta\left(\frac{x+\xi}{2l},\frac{t}{4l^2}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\qquad (4.59)
$$

利用θ函数的级数表达式(4.51)，可将上述Green函数的形式进一步化简为

$$
\begin{aligned}
u&=G(x-\xi,y-\eta;t)\\
&=\frac{1}{2l\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2+\eta^2}{4t}}\mathrm{sh}\frac{y\eta}{2t}\left[\theta\left(\frac{x-\xi}{2l},\frac{t}{4l^2}\right)-\theta\left(\frac{x+\xi}{2l},\frac{t}{4l^2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{l\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2+\eta^2}{4t}}\mathrm{sh}\frac{y\eta}{2t}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}}\left[\cos\frac{n\pi}{l}(x-\xi)-\cos\frac{n\pi}{l}(x+\xi)\right]\\
&=\frac{2}{l\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2+\eta^2}{4t}}\mathrm{sh}\frac{y\eta}{2t}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot H(t).
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

上述级数与例1所得的级数(4.52)一样，对于充分大的t收敛速度是很快的.

二、Fourier方法

例 3 求三维热传导方程(第一边界条件)混合问题在区域Ω上的Green函数,即求解定解问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0 & (P\in\Omega,t>0), & (4.61)\\
u|_{t=0}=\delta(P-P_0) & (P\in\bar{\Omega},P_0\in\Omega), & (4.62)\\
u=0 & (P\in\partial\Omega,t\geqslant 0). & (4.63)
\end{cases}
$$

解 先解定解问题(4.61)—(4.63)相应的特征值问题

$$
\begin{cases}
-\Delta U(P)-\lambda U(P)=0 & (P\in\Omega), & (4.64)\\
U=0 & (P\in\partial\Omega). & (4.65)
\end{cases}
$$

根据多维情形特征值问题的基本定理(见第二章§3)知，存在无穷多个正特征值$\lambda_n>0(n=1,2,\cdots)$和相应的规范化的特征函数$U_n(P)(n=1,2,\cdots)$构成空间$L_2(\Omega)$的一组完全正交基.

将函数$u(P,t)$按特征函数系$\{U_n(P)\}$展开,即令

$$
u(P,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)U_n(P), \tag{4.66}
$$

其中$c_n(t)$是待定的函数.把式(4.66)代入方程(4.61),并利用特征值λ_n和相应特征函数$U_n(P)$所满足的关系式(4.64),有

$$\sum_{n=1}^{\infty}[c_n'(t)U_n(P)-c_n(t)\Delta U_n(P)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[c_n'(t)+\lambda_n c_n(t)]U_n(P)=0.$$

于是,得$c_n(t)$应满足的关系式

$$c_n'(t)+\lambda_n c_n(t)=0, \tag{4.67}$$

而把式(4.66)代入初始条件(4.62)得

$$u(P,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(0)U_n(P)=\delta(P-P_0).$$

利用特征函数系$\{U_n(P)\}$的规范正交性,即

$$\int_{\Omega}U_n(P)U_m(P)\mathrm{d}P=\delta_{n,m}=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m.\end{cases} \tag{4.68}$$

及δ函数的定义.应有

$$c_n(0)=\int_{\Omega}\delta(P-P_0)U_n(P)\mathrm{d}P=U_n(P_0). \tag{4.69}$$

解常微分方程初值问题(4.67)、(4.69),得

$$c_n(t)=U_n(P_0)\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\qquad(n=1,2,\cdots), \tag{4.70}$$

代入(4.66),即得所求的Green函数

$$u(P,t)=G(P-P_0,t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}U_n(P_0)U_n(P)H(t). \tag{4.71}$$

第二章 变分方法

变分方法是解数学物理方程定解问题的常用方法.变分原理描述微分方程定解问题或特征值问题与一定条件下泛函的极值问题之间存在着的一种等价关系,从而可以通过求解相应泛函的极值问题(即变分问题)得到微分方程定解问题或特征值问题的解.

在本章中,我们主要以二维位势方程的边值问题为例,叙述相应的变分原理,证明变分问题解的存在唯一性,并简要介绍求变分问题近似解的一些有效方法,如Ritz Galerkin方法和有限元方法等.对近似解的误差估计和稳定性问题作了讨论.为了叙述简洁,而又不失理论上的严密性,本章在§1中先介绍Hilbert空间、Sobolev空间与广义解等一些基本概念.

§1. Hilbert空间与Sobolev空间

1.1 内积空间

在线性代数课程中我们曾学过线性空间的概念.为了在一般的抽象线性空间中引入长度、角度、距离等度量概念,以便把极限、连续等几何和分析的概念都推广到线性空间,我们先将向量的内积概念加以推广,建立内积空间的概念.

定义 1 如果对于线性空间E中的每一对元素x、y,都对应有一个确定的实数,记为(x,y),使对任意的x、y、$z\in E$,$\alpha\in\mathbf{R}$具有性质

i) $(x,y)=(y,x)$ (对称性),

ii) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$ (齐次性),

iii) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ (可加性),

iv) $(x,x)\geqslant 0$，当且仅当$x=0$时有$(x,x)=0$ （非负性），则称(x,y)为E中元素x与y的内积，定义了内积的线性空间E称为内积空间.

在内积空间中用

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \tag{1.1}$$

来作为元素x"长度"的度量. 由内积的性质 i)—iv)，不难验证$\|x\|$具有向量"长度"所具备的下列基本性质：

i) $\|x\|\geqslant 0$，当且仅当$x=0$时$\|x\|=0$， (1.2)

ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$， (1.3)

iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. (1.4)

上述性质 i)、ii)是显然的，性质iii)的证明需要用到下面重要的不等式(通常称为Schwarz不等式)

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|. \tag{1.5}$$

事实上，因为对任意实数t，根据内积的性质有关系式

$$\begin{aligned}0&\leqslant(x-ty,x-ty)\\&=(y,y)t^2-2(x,y)t+(x,x),\end{aligned}$$

故右端作为t的二次多项式不能有两个相异的实根，从而判别式

$$(x,y)^2-(x,x)\cdot(y,y)\leqslant 0,$$

移项后开方，即得(1.5)式.

利用Schwarz不等式，就可以证明不等式(1.4). 只须注意

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

通过直接计算，还可得到内积空间另一个十分重要的几何性质：

iv) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$， (1.6)

称为平行四边形等式.

注 "平行四边形等式"这个名称来自初等几何，它表示由向量x、y张成的平行四边形的两条对角线的平方和等于四条边的平方和.

定义 2 如果对于线性空间E中的每个元素x，都能以某种方式对应一个满足性质(1.2)—(1.4)的实数$\|x\|$(有时为了强调与空间

E的关系，也记作$\|x\|_E$）．则称E为线性赋范空间，而$\|x\|$称为元素x的范数（或模）．

由前面的推导已证明内积空间是一个线性赋范空间，其范数可由$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$确定．

如果在(1.2)—(1.4)中，只有(1.2)的后半部分不满足，则称$\|x\|$为x的半模．通常把半模记作$|x|$或$|x|_E$（注意：这里的$|\cdot|$不是绝对值）．由半模$|x|=0$不能导出$x=0$．

数学分析的基础是极限．对于序列的各种收敛概念有一个重要的共性：一个序列的元素x_n（可以代表数、向量或函数）收敛于x，是指x_n无限地"趋近"于x，即x_n与x之间的"距离"可以无限地减小．随着我们对"距离"理解的不同，就可得出不同的收敛定义．在向量空间中，任意两点x、y间的距离是用向量$x-y$的长度来刻画的．仿此，对线性赋范空间中任意两元素x、y，我们称$x-y$的范数$\|x-y\|$为元素x、y间的距离，记作$d(x,y)$．并因此也常把线性赋范空间的元素称做点．由此可见，在线性赋范空间中由范数诱导出的距离概念是欧氏空间$\mathbf{R}^3$中两点间距离概念的推广．在定义了内积的线性赋范空间中即有

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y,x-y)}. \tag{1.7}$$

现在我们对定义了内积的线性赋范空间中的点列$\{x_n\}$讨论其收敛性，定义类似于数学分析中的基本列（或称Cauchy列），并讨论空间的完备性．

定义 3 设$\{x_n\}$是线性赋范空间E中的一个点列，如果存在点$x_0\in E$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0,$$

则称点列$\{x_n\}$（按范数）收敛于点x_0，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0 \quad 或 \quad x_n\to x_0 \quad (n\to\infty).$$

在线性赋范空间E中的收敛点列具有如下性质：

i) 收敛点列$\{x_n\}$的极限是唯一的；

ii) 收敛点列$\{x_n\}$必有界，即存在$M>0$，使得

$$\|x_n\|\leqslant M \quad \forall n\in\mathbf{N};$$

iii) 如果点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x_0\in E$，则它的任意一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于点 x_0.

这里我们仅给出性质i)的证明，其余性质的证明留给读者. 事实上，若有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}_0,$$

则由不等式(1.4)

$$0\leqslant\|x_0-\bar{x}_0\|\leqslant\|x_0-x_n\|+\|x_n-\bar{x}_0\|\to 0 \quad (n\to\infty),$$

故 $\|x_0-\bar{x}_0\|=0$，从而 $x_0=\bar{x}_0$.

定义 4 设 E 是线性赋范空间，点列 $\{x_n\}\subset E$. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使当 m、$n>N$ 时，有

$$\|x_n-x_m\|<\varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 为 E 中的一个基本列(或Cauchy列).

与数学分析中的情形相仿，容易证明线性赋范空间中的收敛点列必为基本列. 但是在一般的线性赋范空间中的基本列不一定是收敛列，即不一定存在 $x_0\in E$，使得 $x_n\to x_0$.

例如，在实连续函数空间 $C[0,1]$ 上，若定义范数

$$\|x\|_0=\int_0^1|x(t)|\mathrm{d}t, \tag{1.8}$$

考察点列 $\{x_n\}$:

$$x_n(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}, \\ nt-\dfrac{n}{2}+1, & \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}<t\leqslant\dfrac{1}{2} \\ 1, & \dfrac{1}{2}<t\leqslant 1. \end{cases} \quad (n=2,3,\cdots).$$

如图2-1所示. 则有

$$\|x_n-x_m\|_0=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\to 0 \qquad (m,n\to\infty).$$

所以$\{x_n\}$是$C[0,1]$中按范数(1.8)的基本列.但它不是收敛列,事实上,假设有$x_0=x_0(t)\in C[0,1]$,使得

$$\|x_n-x_0\|_0\to 0\quad(n\to\infty).$$

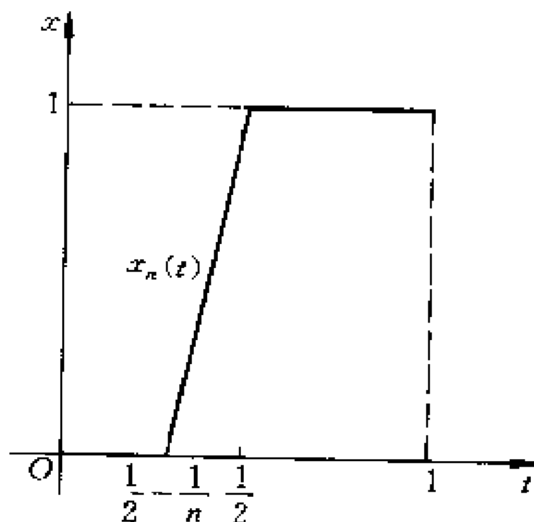


图 2 1

但因

$$\|x_n-x_0\|_0=\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}|x_0(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}}|x_n(t)-x_0(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-x_0(t)|\,\mathrm{d}t,$$

而这个等式的右端中每个积分都是非负的.所以应有

$$x_0(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2},\\ 1, & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

这与$x_0(t)\in C[0,1]$矛盾.因此$\{x_n\}$不是收敛列.

定义 5 如果线性赋范空间E中的每个基本列都收敛于E中的点,则称E是完备的.

正如我们在数学分析中所知,对于实数域而言,有一个极为重要的性质,即凡基本列必收敛,这叫做实数域的完备性.由于实数域具有完备性,因此它具有很好的性质及广泛的应用,这是有理数域无法与之相比的.例如在有理数域内,方程$x^2=2$无解,就是因为它不是完备的.对于不完备的线性赋范空间,在应用上也会造成许多困难.因此,仿照在数域中通过引进无理数扩充成完备的实数域,我们也设想在不完备的空间中补充进一些新的"点",使得不收

敛的基本列亦具有"极限",将不完备的空间扩充成完备的空间.

1.2 Hilbert空间

定义 6 完备的内积空间称为Hilbert空间. 完备的线性赋范空间称为Banach空间.

事实上,Hilbert空间是一种特殊类型的Banach空间. 一般的内积空间E虽然不一定是完备的,但我们可采取加上一切"极限点"的办法使其完备化而成为Hilbert空间.

需要注意的是:收敛性是由范数决定的. 而对同一个线性空间,却可以不同方式规定范数. 一般说来,不同的范数导致不同的收敛性.例如,在$C[a,b]$中若定义范数(通常称C模)

$$\|u\|_C=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|u(x)|,\quad u(x)\in C[a,b],$$

则不难验证$C[a,b]$是一个完备的Banach空间,按范数$\|u\|_C$的收敛是指一致收敛.但若定义范数

$$\|u\|_0=\int_a^b|u(x)|\mathrm{d}x,\qquad u(x)\in C[a,b],$$

则正如前面已举例指出,$C[a,b]$就不是一个完备空间.又若定义范数(通常称L_2模)

$$\|u\|_{L_2}=\left(\int_a^b u^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\qquad u(x)\in C[a,b],$$

则按范数$\|u\|_{L_2}$的收敛是指平均收敛.可以证明,这时$C[a,b]$也不是完备的. 对同一线性空间上,以两种不同方式定义的范数,若确定相同的收敛性,就可以认为它们没有区别,这就是等价模的概念.

定义 7 设在线性空间E上规定的两种模$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$,如果存在正数α、β,使

$$\alpha\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\beta\|x\|_1,\qquad\forall x\in E$$

成立,则称模$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是等价的.

对等价模而言,收敛性是等价的,即按其中一个模收敛的序

列，按另一模也必然收敛. 因而，由收敛概念派生出来的其他概念(如完备性等)也等价.

1.3 正交分解与投影定理

在引入了内积和内积空间的概念后，我们可以仿照欧氏空间$\mathbf{R}^3$那样，在抽象的内积空间中利用内积引入正交概念. 并在此基础上进一步讨论Hilbert空间中正交投影、正交分解等重要几何属性，以及与正交性有关的最佳逼近问题.

定义 8 设E是内积空间，x、$y\in E$，M是E中非空子集. 如果内积$(x,y)=0$，则称x与y是正交的，记作$x\perp y$.

又如果x与M中的一切元素都正交，即

$$x\perp y,\qquad \forall y\in M,$$

则称x与M正交，记作$x\perp M$. 而E中与M的一切元素都正交的元素的全体，称为M的正交补，记作$M^{\perp}$. 即

$$M^{\perp}=\{x\mid x\perp M, x\in E\}.$$

显然，正交补$M^{\perp}$是E的子空间.

在欧氏空间$\mathbf{R}^3$中，设给定一个通过原点O的平面M，则M是$\mathbf{R}^3$的一个子空间，而$M^{\perp}$就是通过原点O，且与M正交的直线. 由空间解析几何知，对任意向量$x\in\mathbf{R}^3$，向量x可正交分解成

$$x=y_0+z,$$

其中$y_0\in M$是向量x在平面M上的投影向量，$z=x-y_0\in M^{\perp}$ (见图2-2).

从上述几何性质可以看出，向量$x-y_0$的长度(即模)就是点P到平面M的距离，即

$$\|x-y_0\|=d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

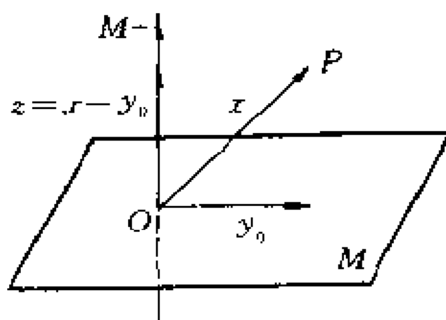


图 2-2

这就是说，向量x在M上的投影向量y_0就是M中对x的最佳逼近元.

从这个例子可见，在有限维空间$\mathbf{R}^3$中向量的正交分解、投影向

量和最佳逼近元之间有着密切的联系.现在我们把类似的概念和结果推广到Hilbert空间.

定理 1 设M是Hilbert空间H的一个子空间,$x\in H$,但$x\notin M$,又设$x_M\in M$是x到M的最近点,即

$$\|x-x_M\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

则$x-x_M\perp M$.

证明 对于给定的x、x_M,令

$$j(\varepsilon)=\|x-(x_M+\varepsilon y)\|^2, \qquad \varepsilon\in\mathbf{R}$$

由于$\forall y\in M$,$x_M\in M$,可知$x_M+\varepsilon y\in M$,故

$$j(\varepsilon)\geqslant j(0).$$

根据函数极值的必要条件,应有$j'(0)=0$,而

$$j(\varepsilon)=\|x-x_M\|^2-2\varepsilon(x-x_M,y)+\varepsilon^2\|y\|^2,$$

由$j'(0)=0$,得

$$(x-x_M,y)=0, \qquad \forall y\in M.$$

即有

$$x-x_M\perp M.$$

通常称x_M为x在M上的正交投影,记作

$$x_M=\Pi_M x.$$

现在我们研究正交投影x_M的存在性问题.因为一般说来,对内积空间中的任意x及任意线性子空间M,x在M上的投影x_M是不一定存在的.但对于Hilbert空间H中的闭线性子空间M,我们有下述结论:

定理 2 (投影定理)设M为Hilbert空间H中的闭线性子空间,则对任意的$x\in H$,但$x\notin M$,存在唯一的$x_M\in M$,使得

$$\|x-x_M\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

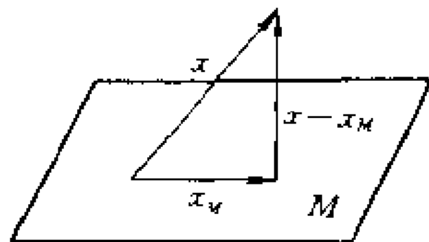


图 2-3

证明 令$d=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$,则存在$y_n\in M(n=1,2,\cdots)$,使$\|x-y_n\|$

$\to d$. 于是，$\forall \varepsilon>0$，存在 $N>0$，使当 $n,m\geqslant N$ 时有

$$\|x-y_n\|^2<d^2+\frac{\varepsilon^2}{4},\ \|x-y_m\|^2<d^2+\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

因为 $\frac{1}{2}(y_n+y_m)\in M$，故 $\left\|\frac{1}{2}(y_n+y_m)-x\right\|\geqslant d$. 由平行四边形等式知，当 n、$m\geqslant N$ 时有

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2&=\|y_n-x+x-y_m\|^2\\&=2\|y_n-x\|^2+2\|x-y_m\|^2\\&\quad-4\left\|\frac{1}{2}(y_n+y_m)-x\right\|^2\\&\leqslant 4d^2+\varepsilon^2-4d^2\\&=\varepsilon^2.\end{aligned}$$

可见 $\{y_n\}$ 是基本列. 从而存在 $x_M\in H$，使 $y_n\to x_M$. 又因 M 是闭的，故 $x_M\in M$，且 $d=\|x-x_M\|$.

这就证明了 x 在 M 上的投影 x_M 存在，下面再证唯一性.

若 x_M、x'_M 为 x 在 M 上的两个投影，则 x_M、$x'_M\in M$，且 $x-x_M\in M^{\perp}$，$x-x'_M\in M^{\perp}$. 由于 M 为线性子空间，故

$$x_M-x'_M=(x-x'_M)-(x-x_M)\in M^{\perp}.$$

又因 x_M、$x'_M\in M$，故 $x_M-x'_M\in M$. 于是 $(x_M-x'_M)\perp(x_M-x'_M)$，即

$$(x_M-x'_M,x_M-x'_M)=0.$$

从而 $\|x_M-x'_M\|=0$. 所以 $x_M=x'_M$.

综合上述定理1和定理2，可以看出，$\forall x\in H$，存在唯一的 $x_M\in M$ 和 $z\in M^{\perp}$，使得

$$x=x_M+z. \tag{1.9}$$

式(1.9)也称为 $x\in H$ 关于 M 的正交分解式.

1.4 有界线性泛函与Riesz表示定理

所谓**变分问题**即指**泛函**的**极值问题**. 为此我们引进有关**泛函**的概念.

定义 9 i) 设E是线性赋范空间，$\mathbf{R}$为实数域，则称映射$f: E\to\mathbf{R}$为泛函；

ii) 若$\forall x_1、x_2\in E$及数α，有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),$$
$$f(\alpha x_1)=\alpha f(x_1),$$

则称f为线性泛函；

iii) 若 $\forall x_n、x\in E(n=1,2,\cdots)$，当$x_n\to x$时有$f(x_n)\to f(x)$，则称$f$为连续泛函；

iv) 若$\forall x\in E$，$\exists M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M\|x\|,$$

则称f为有界泛函.

定理3 设E为线性赋范空间，$f: E\to\mathbf{R}$为线性泛函，则f为连续泛函的充要条件是f为有界泛函.

证明 (充分性)设f为有界泛函，即存在$M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M\|x\|, \qquad \forall x\in E.$$

若$x_n\to x(x_n、x\in E)$，则

$$|f(x_n)-f(x)|=|f(x_n-x)|\leqslant M\|x_n-x\|\to 0,$$

即有$f(x_n)\to f(x)$.所以f为连续泛函.

(必要性)用反证法.若f无界，则对每一个自然数n，必存在$x_n\in E$，$x_n\neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$，使得

$$|f(x_n)|\geqslant n\|x_n\|.$$

令 $y_n=\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$，则

$$\|y_n\|=\frac{1}{n}\to 0.$$

由f的连续性，有$f(y_n)\to f(0)=0$.

但另一方面

$$|f(y_n)|=\frac{1}{n\|x_n\|}|f(x_n)|\geqslant 1.$$

两者相互矛盾，故f为有界泛函.

上述定理表明，对于线性泛函，有界性与连续性是等价的.

定义10 设$f: E\to\mathbf{R}$为有界线性泛函，则

$$\|f\| \overset{\mathrm{d}}{=} \inf\{M \mid |f(x)| \leqslant M\|x\|, \forall x\in E\} \tag{1.10}$$

称为泛函f的模.

式(1.10)也可表述为

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in E \\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} |f(x)|, \tag{1.11}$$

且有

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|. \tag{1.12}$$

设H是Hilbert空间，对任一固定元素$x\in H$，考虑泛函

$$f(y)=(x,y), \qquad \forall y\in H,$$

它显然是线性的.由Schwarz不等式有

$$|f(y)| = |(x,y)| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|, \qquad \forall y\in H.$$

所以f是H上的有界线性泛函，且$\|f\|\leqslant\|x\|$.又因当$y=x$时，$f(x)=(x,x)=\|x\|^2$，故有$\|f\|=\|x\|$.反之，对任意一个定义在H上的有界线性泛函$f(y)$，是否也一定存在一个元素$x_f\in H$，使它能表成内积(x_f, y)的形式？回答是肯定的，这就是在泛函分析中极为重要的Riesz表示定理.

定理4 (Riesz表示定理)设H是Hilbert空间，那么，对于H上的任一个有界线性泛函$f(x)$，存在唯一的$y_f\in H$，使得

$$f(x)=(y_f, x), \qquad \forall x\in H,$$

且$\|f\|=\|y_f\|$.

在证明上述定理之前，我们先对$H=\mathbf{R}^3$的情形讨论Riesz表示定理的几何意义.对$\mathbf{R}^3$上的有界线性泛函$f(x)$，Riesz表示定理的结论是指，存在唯一的$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$使得

$$f(x)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=(\alpha,x),$$
$$\forall x=\{x_1,x_2,x_3\}\in\mathbf{R}^3.$$

考虑$\mathbf{R}^3$中的平面M:

$$f(x)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=0, \qquad \forall x\in\mathbf{R}^3,$$

可见$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$就是平面$M$的法向量. 所以, Riesz表示定理中的$y_f\in H$, 也可以理解为是"超平面"$\{x\in H \mid f(x)=0\}$的"法向量".

现在对定理4证明如下:

证明 令$M=\{x\in H \mid f(x)=0\}$, 称为f的零空间. 显然它是H的闭线性子空间.

如果$M=H$, 则$0=f(x)=(0,x)$. 此时只要取$y_f=0$便满足定理要求.

若$M\neq H$, 则总有$x_0\in H$, $x_0\notin M$, 使得$f(x_0)\neq 0$. 根据投影定理(定理2)知, 必存在唯一

$$x_M=\Pi_M x_0 \qquad (x_M\in M, x_M\neq 0)$$

使$z_0=x_0-x_M\in M^\perp$, 即

$$(z_0, y)=0, \qquad \forall y\in M.$$

根据对$H=\mathbf{R}^3$情形的分析, 应取$y_f=\lambda z_0$(λ是待定常数). 为此选取λ使得

$$f(x)=(y_f, x), \qquad \forall x\in H.$$

当取$x=z_0$, 得$f(z_0)=(\lambda z_0, z_0)$, 即有

$$\lambda=\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}.$$

现证明$y_f=\dfrac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}z_0$适合定理的要求. 为此先对任意的$x\in H$进行正交分解, 即找$cz_0\in M^\perp$, 使得$x-cz_0\in M$. 由$M$的定义即找$c$使得

$$f(x-cz_0)=f(x)-cf(z_0)=0.$$

所以$c=\dfrac{f(x)}{f(z_0)}$, 即

$$x-\frac{f(x)}{f(z_0)}z_0\in M.$$

于是

$$(y_f, x)=(\lambda z_0, x)=(\lambda z_0, x-cz_0)+(\lambda z_0, cz_0)=\lambda c\|z_0\|^2=f(x).$$

此即表明，取$y_f=\dfrac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}z_0$便满足定理的要求.

最后证明唯一性.设另有$\overline{y_f}$，使

$$f(x)=(\overline{y_f}, x), \qquad \forall x\in H,$$

则

$$(\overline{y_f}-y_f, x)=0, \qquad \forall x\in H.$$

取$x=\overline{y_f}-y_f$，即有$\overline{y_f}-y_f=0$.

1.5 Sobolev空间

众所周知，一些数学物理方程定解问题的建立来源于变分问题，即求能量泛函的极值.这要求问题的解具有一定的光滑性，即要求在积分号下函数可微.但对于微商可积的函数空间，其完备性当时人们是不够清楚的，对变分问题解的存在性产生了疑问.因此，在19世纪后半期变分方法曾一度遭到冷落.

1934年Sobolev建立称之为Sobolev空间的概念，从而把变分原理建立在一个严格的理论基础上.为了构造Sobolev空间，首先需要引进广义微商的概念.

一、广义微商

设区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，记$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，并记函数集

$$C_0^\infty(\Omega)=\{u(x)|u\in C^\infty(\Omega), 且\mathrm{supp}\ u\subset\Omega\}, \tag{1.13}$$

其中supp$u$表示对定义在Ω上的函数$u(x)$，使$u(x)\neq 0$的点集的闭包，称为$u(x)$的支集.属于$C_0^\infty(\Omega)$的函数称为定义在Ω上的试探函数.

定义11 设$u(x)\in L_2(\Omega)$，$v_i(x)\in L_2(\Omega)(i=1, 2, \cdots, n)$.如果对任意的试探函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，有关系式

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x=-\int_\Omega v_i\varphi\mathrm{d}x \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1.14}$$

成立，则称$v_i(x)$是函数$u(x)$对于x_i的一阶广义微商，并记$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

更一般地，引进符号$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$，($\alpha_i$是非负整数，$i=1,2,\cdots,N$)，记

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N},$$

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N,$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_N^{\alpha_N} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

如果$D^\alpha u \in L_2(\Omega)$，即指

$$\int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx < \infty,$$

且关系式

$$\int_\Omega D^\alpha u \cdot \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^\alpha \phi \, dx, \quad \forall \phi(x) \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.15)$$

成立，则称$D^\alpha u$是函数u的α阶广义微商.

当$u(x)\in C^\infty(\Omega)$时，应用Green公式易知广义微商就是通常(古典)意义下的微商.

定理 5 广义微商是唯一的.

证明 假设不然，设函数$u(x)$具有两个不同的广义微商v_i和v_i^*. 则根据定义11，对任意函数$\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx,$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i^* \varphi dx.$$

两式相减，得

$$\int_\Omega (v_i - v_i^*) \varphi dx = 0, \qquad \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega).$$

由于$C_0^\infty(\Omega)$在$L_2(\Omega)$中稠密，故在Ω内$v_i - v_i^* = 0$，即在Ω中有

$v_i=v_i$.需指出的是,这里的等号是指几乎处处相等.

二、Sobolev空间

现在我们引进Sobolev空间的概念.

定义12 我们用$H^1(\Omega)$表示一切$u(x)\in L_2(\Omega)$,且具有一阶广义微商$\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L_2(\Omega)(i=1,2,\cdots,n)$的函数的全体所组成的集合,即

$$H^1(\Omega)=\{u(x)|u\in L_2(\Omega),\text{且广义微商}\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L_2(\Omega),\ i=1,2,\cdots,n\}. \tag{1.16}$$

并规定模

$$\|u\|_1=\left[\int_\Omega u^2\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}. \tag{1.17}$$

称$H^1(\Omega)$为Sobolev空间.

定理 6 Sobolev空间$H^1(\Omega)$按内积

$$(u,v)_1=\int_\Omega uv\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\mathrm{d}x \tag{1.18}$$

是一个Hilbert空间.

证明 即需证明$H^1(\Omega)$是一个完备空间.

设$\{u_k(x)\}$是$H^1(\Omega)$中的基本列,即当k、$l\to\infty$时,$\|u_k-u_l\|_1\to 0$,从而也就有

$$\|u_k-u_l\|_{L_2(\Omega)}\to 0,\ \left\|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)}\to 0.$$

由于$L_2(\Omega)$的完备性,存在函数$u(x)$和$v_i(x)(i=1,2,\cdots n)$,使当$k\to\infty$时,有

$$\|u_k-u\|_{L_2(\Omega)}\to 0,\ \left\|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-v_i\right\|_{L_2(\Omega)}\to 0.$$

由于

$$\int_\Omega u_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x=-\int_\Omega\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\varphi\mathrm{d}x,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

于是，有

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega v_i\,\varphi\mathrm{d}x,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

从而证明了

$$v_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

上述结果表明存在$u(x)\in H^1(\Omega)$，使得

$$\|u_k-u\|_1\to 0\quad (k\to\infty),$$

所以$H^1(\Omega)$是完备的.

附注 1° $H^1(\Omega)$也称为一阶Sobolev空间.更一般地，可定义m阶Sobolev空间$H^m(\Omega)$为

$$H^m(\Omega)=\{u(x)|u\in L_2(\Omega),\text{且广义微商}\mathrm{D}^\alpha u\in L_2(\Omega),\forall|\alpha|\leqslant m\},\quad (1.19)$$

并规定内积

$$(u,v)_m=\int_\Omega uv\mathrm{d}x+\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u\cdot\mathrm{D}^\alpha v\mathrm{d}x\quad (1.20)$$

及模

$$\|u\|_m=\sqrt{(u,u)_m}\ .\quad (1.21)$$

特殊地，$H^0(\Omega)=L_2(\Omega)$.

2° 记函数集合

$$H_0^1(\Omega)=\{u(x)|u\in H^1(\Omega),\text{且}u|_{\partial\Omega}=0\},\quad (1.22)$$

显然有$H_0^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$.可以证明$H_0^1(\Omega)$也是完备的，且有下述的结论：$C_0^\infty(\Omega)$在$H_0^1(\Omega)$中稠密.即若$u(x)\in H_0^1(\Omega)$，则存在$\{u_n(x)\}\in C_0^\infty(\Omega)$，使得当$n\to\infty$时，有

$$\|u_n(x)-u(x)\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0.$$

$H_0^1(\Omega)$中的模$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$与$H^1(\Omega)$中的模$\|\cdot\|_1$取相同的形式.

三、嵌入定理

嵌入定理深刻地刻画了Sobolev空间与其它函数空间之间的关系，它在近代偏微分方程理论研究中起着重要作用.设区域Ω是$\mathbf{R}^N$中的开集，边界$\partial\Omega$充分光滑，现把嵌入定理的结论叙述如下：

嵌入定理 1 从$H^k(\Omega)$到$H^l(\Omega)(k>l)$的嵌入算子I: $H^k \to H^l$是有界算子，即存在常数M，使得

$$\|u\|_l \leqslant M\|u\|_k, \tag{1.23}$$

而且嵌入算子是完全连续的.

这个定理有三层意思:

1° "嵌入"是恒同嵌入. 是指$H^k(\Omega)$的元素u，必属于$H^l(\Omega)$，即$H^k(\Omega) \subset H^l(\Omega)$;

2° 嵌入算子是有界的. 是指$H^k(\Omega)$中的收敛序列，不仅属于$H^l(\Omega)$，而且亦是$H^l(\Omega)$中的收敛序列;

3° 嵌入算子是完全连续的. 即$H^k(\Omega)$中的任一有界集，不仅在$H^l(\Omega)$中亦是有界集，而且存在在$H^l(\Omega)$意义下收敛的子序列(即具有紧致性).

这表明$H^k(\Omega)$比$H^l(\Omega)$有更强的结构.

嵌入定理 2 若$k>\dfrac{N}{2}$，N是区域Ω所属空间的维数，则$H^k(\Omega)$嵌入$C(\overline{\Omega})$，且存在常数M，使得

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant M\|u\|_k, \tag{1.24}$$

而且嵌入算子I: $H^k(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$是完全连续的.

这里除了前面讲的三层意思外，还有一点需要特别提及: 我们说$H^k(\Omega)$嵌入$C(\overline{\Omega})$，即指若一个平方可和函数只要它具有直到k阶平方可和的广义微商$\left(k>\dfrac{N}{2}\right)$，那么我们一定可以修改这个函数在零测集上的函数值，使它成为$\overline{\Omega}$上的连续函数，也就是它必然与一个连续函数对等.

嵌入定理 3 若有非负整数l满足$k-l>\dfrac{N}{2}$，则$H^k(\Omega)$嵌入$C^l(\overline{\Omega})$，且存在常数M，使得

$$\|u\|_{C^l(\overline{\Omega})} \leqslant M\|u\|_k, \tag{1.25}$$

嵌入算子I: $H^k(\Omega) \to C^l(\overline{\Omega})$是完全连续算子.

四、迹定理

对于变分问题的解u，除了要求它属于某函数空间$H^k(\Omega)$以外，还要求它在边界$\partial\Omega$上满足一定的条件．如果函数$u\in C(\overline{\Omega})$，那么边值$u|_{\partial\Omega}$的意义是明显的．但若$u\notin C(\overline{\Omega})$，$u|_{\partial\Omega}$的含意是什么呢？如空间$H^1(\Omega)$，由嵌入定理2可知，对于$N=2$或3维的区域$\Omega$，不能得到$H^1(\Omega)\subset C(\overline{\Omega})$，这时如果说$u|_{\partial\Omega}$取值为已知，就必须给出确切的含意．

定理 7(迹定理)　在空间$C^k(\overline{\Omega})$上引进线性算子γ：$\gamma u=u|_{\partial\Omega}$，若令

$$\|\gamma u\|_{k-1,\partial\Omega}=\left[\sum_{|\alpha|=0}^{k-1}\int_{\partial\Omega}|D^\alpha u|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}\quad(k\geqslant 1),$$

则存在只依赖于Ω的常数M，使得

$$\|\gamma u\|_{k-1,\partial\Omega}\leqslant M\|u\|_k. \tag{1.26}$$

对任一函数$u\in H^k(\Omega)$，可以找到序列$\{u_n\}\subset C^k(\overline{\Omega})$，使$\|u_n-u\|_k\to 0$．显然，$\{u_n\}$是$H^k(\Omega)$的基本列．由迹定理知$\{D^\alpha u_n\}$$(|\alpha|\leqslant k-1)$是$L_2(\partial\Omega)$中的基本列，故存在$\varphi_\alpha\in L_2(\partial\Omega)$，使得

$$\|D^\alpha u_n-\varphi_\alpha\|_{L_2(\partial\Omega)}\to 0,\quad \forall\alpha:|\alpha|\leqslant k-1.$$

显然，当$u\in C^k(\overline{\Omega})$时，$\varphi_\alpha=D^\alpha u|_{\partial\Omega}$．对于一般的$u\in H^k(\Omega)$，我们则称$\varphi_\alpha$为$D^\alpha u$的广义边值，并以算子$\gamma_\alpha$表示：

$$\gamma_\alpha u=\varphi_\alpha=D^\alpha u|_{\partial\Omega}.$$

以后凡提到取边值时，都理解为这种广义边值．

算子$\gamma_\alpha(|\alpha|\leqslant k-1)$称为迹算子．当$u\in H_0^k(\Omega)$时显然有$\gamma_\alpha u=0$$(|\alpha|\leqslant k-1)$．即$H_0^k(\Omega)$中的函数，它本身直到$k-1$阶的一切广义微商都取零边值．特别当$u\in H_0^1(\Omega)$时，有$\gamma_0 u=0$，或直接写为$u|_{\partial\Omega}=0$．

五、等价模定理

为了在后面研究插值逼近的误差的需要，有必要引进Sobolev空间的等价模概念．因为对于一个函数空间的模如果定义比较恰当，将会对问题的研究带来方便．而如果引进的模与原来所熟悉的模等价，那就表示对于新的模，空间的结构是不变的，它保持了原来空间的性质．

对$u\in H^1(\Omega)$，若定义

$$|u|_1=\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.27}$$

则不难验证，除$|u|_1=0$不能导出$u=0$以外，它满足所有范数的条件(1.2)—(1.4)，因而它是"半模"。

定理 8 (等价模定理)设$f(u)$是定义在$H^1(\Omega)$上的有界线性泛函，且对任意非零常数c，有$f(c)\neq 0$，则模$\|u\|_1$与模$(|u|_1^2+|f(u)|^2)^{1/2}$等价，即存在α、$\beta>0$，使对一切$u\in H^1(\Omega)$有

$$\alpha(|u|_1^2+|f(u)|^2)^{1/2}\leqslant\|u\|_1\leqslant\beta(|u|_1^2+|f(u)|^2)^{1/2}. \tag{1.28}$$

证明 先证明左边的不等式。因为$f(u)$是$H^1(\Omega)$上的有界线性泛函，所以存在$M>0$，使$|f(u)|^2\leqslant M\|u\|_1^2$，又因$|u|_1^2\leqslant\|u\|_1^2$，故有

$$|u|_1^2+|f(u)|^2\leqslant(1+M)\|u\|_1^2.$$

取$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+M}}$，即得(1.28)左边的不等式。

右边的不等式的证明，用反证法。假设不然，则对任何自然数n，必存在$u_n\in H^1(\Omega)$，使得

$$\|u_n\|_1=1, \tag{1.29}$$

$$(|u_n|_1^2+|f(u_n)|^2)^{1/2}<\frac{1}{n}. \tag{1.30}$$

由(1.29)，序列$\{u_n\}$在$H^1(\Omega)$中有界。根据嵌入定理1，必存在子序列(不妨仍记作$\{u_n\}$)，使得它在$H^0(\Omega)$(即$L_2(\Omega)$)中收敛。于是$\forall\varepsilon>0$，$\exists k_1>0$，使当m、$n\geqslant k_1$时有

$$\|u_n-u_m\|_{L_2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由(1.30)式，$\exists k_2>0$，使当m、$n\geqslant k_2$时

$$|u_n-u_m|_1<|u_n|_1+|u_m|_1<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当m、$n\geqslant\max\{k_1,k_2\}$时

$$\|u_n-u_m\|_1\leqslant\|u_n-u_m\|_{L_2}+|u_n-u_m|_1<\varepsilon.$$

即$\{u_n\}$是$H^1(\Omega)$的基本列.由$H^1(\Omega)$的完备性知,必存在$u\in H^1(\Omega)$,使

$$\|u_n - u\|_1 \to 0 \quad (n\to\infty).$$

于是,对(1.29)、(1.30)两式取极限,即得

$$\|u\|_1=1, |u|_1=0, |f(u)|=0.$$

由上述第二式得,u应是常数.再根据定理假设的条件及第三式,应有$u=0$.而这与第一式$\|u\|_1=1$矛盾.定理得证.

作为上述等价模定理的特例,我们可以导出两个非常有用的不等式:Poincaré不等式和Friedrichs不等式.

1° Poincaré不等式:对任意函数$u(x)\in H^1(\Omega)$,有不等式

$$\|u\|_1 \leqslant c\left[\left(\int_\Omega u\mathrm{d}x\right)^2+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.31}$$

成立,其中c是仅依赖于区域Ω,而与函数u无关的常数.

证明 设$u\in H^1(\Omega)$,取$f(u)=\int_\Omega u\mathrm{d}x$是线性泛函,由Schwarz不等式和嵌入定理1,有

$$|f(u)|\leqslant\left(\int_\Omega \mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$=c\|u\|_{L^2}\leqslant c\,|u|_1.$$

故$f(u)$是有界泛函.又当u是非零常数a时,$f(a)\neq 0$.因此适合等价模定理的全部条件,故由该定理知,存在常数c,使得

$$\|u\|_1\leqslant c(\,|f(u)|^2+|u|_1^2)^{1/2}.$$

此即Poincaré不等式(1.31).

2° Friedrichs不等式 对任意函数$u(x)\in H^1(\Omega)$,有不等式

$$\|u\|_1\leqslant c\left[\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x+\left(\int_{\partial\Omega}u(x)\mathrm{d}s\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.32}$$

成立,其中$\partial\Omega$为区域Ω的边界,c是仅依赖于区域Ω,而与函数u无关的常数.

证明 设$u\in H^1(\Omega)$,取$f(u)=\int_{\partial\Omega}u\mathrm{d}s$,显然是线性泛函.又由

Schwarz不等式及迹定理

$$|f(u)| \leqslant c\left(\int_{\partial\Omega} u^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} \leqslant c\|u\|_1.$$

故$f(u)$是$H^1(\Omega)$上有界泛函. 当u为非零常数a时, 显然有$f(a) \neq 0$. 从而由等价模定理, 得

$$\|u\|_1 \leqslant c\left[|u|_1^2 + \left(\int_{\partial\Omega} u\mathrm{d}s\right)^2\right]^{1/2}.$$

此即Friedrichs不等式(1.32).

特别地, 当$u \in H_0^1(\Omega)$时, 有

$$\|u\|_1 \leqslant c|u|_1 = c\|\nabla u\|_{L_2}. \tag{1.33}$$

于是有

$$c_1\|u\|_1 \leqslant |u|_1 \leqslant c_2\|u\|_1, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

其中c_1、c_2是与u无关的常数. 即对$H_0^1(\Omega)$, 模$\|u\|_1$与半模$|u|_1$(亦即$\|\nabla u\|_{L_2}$)等价.

§2. 变 分 原 理

2.1 膜平衡问题

我们先考虑一个物理模型——薄膜平衡问题: 设有一个处于紧张状态的薄膜, 其水平位置为Oxy平面上的区域Ω, 在区域的边界$\partial\Omega$上已知膜的垂直位移为$\varphi(x,y)$. 以$u(x,y)$表示膜上坐标为(x,y)的点在膜平衡时的位移. 若膜的内部还受到垂直于水平位置的密度为$f(x,y)$的外力的作用, 讨论膜处于平衡状态时的形状.

根据力学中的最小势能原理: 受外力作用的弹性体, 在满足已知边界位移约束的一切可能位移中, 以达到平衡状态的位移使物体的总势能为最小.

按照弹性力学理论

总势能=应变能－外力作功.

而应变能就是把膜从水平位置转移到平衡位置, 为了抵抗张力所

作的功.设膜的形状为$u=v(x,y)$，则当$|v_x|$、$|v_y|\ll 1$时，略去高阶小量，膜的应变能近似为

$$T\Delta S=T\iint_{\Omega}(\sqrt{1+v_x^2+v_y^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\approx\frac{T}{2}\iint_{\Omega}(v_x^2+v_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中T为张力的大小，ΔS为膜由于变形所产生的面积的增量.而外力所作的功为

$$\iint_{\Omega}fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

故总势能近似地可表示为

$$J[v]=\frac{T}{2}\iint_{\Omega}(v_x^2+v_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Omega}fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

这是关于二元函数$v(x,y)$的一个泛函，其中一切可能位移$v(x,y)$的容许函数集为

$$K=\{v(x,y)|J[v]<+\infty,\text{ 且 }v|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y)\}. \tag{2.2}$$

于是，膜平衡问题归结为求泛函(2.1)在条件$v(x,y)\in K$下的极小值问题.即求变分问题

$$J[u]=\min_{v\in K}J[v] \tag{2.3}$$

的解$u(x,y)$.

膜平衡问题除了归结为求解上述变分问题，还可以表述为求解Poisson方程的Dirichlet问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & (\Omega), & (2.4)\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi & & (2.5)\end{cases}$$

或变分的Galerkin形式

$$\iint_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega}fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

可以证明，在一定的条件下以上三者之间是互相等价的.这就是下面要论述的Dirichlet原理.

在证明Dirichlet原理之前，我们先建立下述变分法的基本引理.

引理1 设$f(x,y)\in C(\Omega)$，且满足关系式

$$\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega),\tag{2.7}$$

则在Ω上$f(x,y)=0$.

证明 用反证法. 假若在某点$(\xi,\eta)\in\Omega$处$f(\xi,\eta)\neq 0$，不妨设$f(\xi,\eta)>0$.由f的连续性知，在点(ξ,η)的d邻域$D\subset\Omega$中仍有$f>0$.设

$$D=\{(x,y)|(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<d^2\},$$

取

$$v(x,y)=\begin{cases}[d^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2]^2, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\in\Omega-D,\end{cases}$$

则$v(x,y)\in H_0^1(\Omega)$，但是有

$$\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.$$

此与引理的假设条件(2.7)矛盾，故在Ω上应有$f(x,y)\equiv 0$.

2.2 Dirichlet 原理与广义解

现在我们仍以薄膜平衡问题为例，证明在一定的条件下变分问题与相应微分方程定解问题之间的等价性关系，建立下述变分原理.

定理 9 (Dirichlet 原理) 当$u(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$时，Poisson方程的Dirichlet问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & (\Omega), & (2.8)\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi & & (2.9)\end{cases}$$

与变分问题

$$J[u]=\min_{v\in M} J[v],\tag{2.10}$$

其中

$$J[v]=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{2.11}$$

$$M=\{v(x,y)|v\in H^1(\Omega),\ v|_{\partial\Omega}=\varphi\},\tag{2.12}$$

以及变分形式

$$\iint\limits_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega),\tag{2.13}$$

三者是互相等价的.

证明 先证定解问题(2.8)、(2.9)与变分形式(2.13)等价.

设$u(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$是定解问题(2.8)、(2.9)的解.则有

$$-\iint\limits_{\Omega}(\Delta u+f)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega).$$

利用Green公式化简.即有

$$\iint\limits_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega).$$

反之,由引理1即得$-\Delta u=f$.故定解问题(2.8)、(2.9)与(2.13)等价.

下面再证变分问题(2.10)—(2.12)与(2.13)等价.为书写简单起见,引进记号

$$D(u,v)=\iint\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{2.14}$$

$$(u,v)=\iint\limits_{\Omega}uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{2.15}$$

则泛函(2.11)可写成

$$J[v]=\frac{1}{2}D(v,v)-(f,v).\tag{2.11$'$}$$

变分形式(2.13)为

$$D(u,v)=(f,v),\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega).\tag{2.13$'$}$$

设$u\in M$,且满足

$$J[u]=\min_{w\in M}J[w],$$

则对于任意的实数α和$v\in H_0^1(\Omega)$,有$u+\alpha v\in M$,且

$$
\begin{aligned}
j(\alpha)&=J[u+\alpha v]\\
&=\frac{1}{2}D(u+\alpha v,u+\alpha v)-(f,u+\alpha v)\\
&=J[u]+\frac{\alpha^2}{2}D(v,v)+\alpha D(u,v)-\alpha(f,v).
\end{aligned}
$$

由于$j(0)=\min\limits_{\alpha\in\mathbf{R}} j(\alpha)$，根据函数极值的必要条件应有$j'(0)=0$.即得

$$D(u,v)-(f,v)=0,\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

反之，若函数$u\in M$是变分形式(2.13)的解，则

$$J[u\pm v]-J[u]=\frac{1}{2}D(v,v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

由于$D(v,v)$是非负的，即对一切$v\in H_0^1(\Omega)$有$D(v,v)\geqslant 0$.即得

$$J[u]=\min_{w\in M} J[w].$$

综上所述，Dirichlet原理得证.

需要强调指出的是：在定解问题(2.8)、(2.9)中要求其解$u\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，而在变分问题(2.10)—(2.12)或变分形式(2.13)中的解u只需要具有一阶广义微商，即$u\in H^1(\Omega)$且$u|_{\partial\Omega}=\varphi$.因此，若仅有$u\in M$，而$u\notin C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，则此时的$u$就不能是定解问题(2.8)、(2.9)(在古典意义下)的解，我们把它称为是定解问题(2.8)、(2.9)的广义解.

又若我们把给定的函数$\varphi(x,y)$提升(延拓)为$\phi(x,y)$，使$\phi\in H^1(\Omega)$且$\phi|_{\partial\Omega}=\varphi$，这时变分问题(2.10)—(2.12)或(2.13)的解u应有$u-\phi\in H_0^1(\Omega)$.

定义13 若$u\in H^1(\Omega)$，$u-\phi\in H_0^1(\Omega)$，且使得

$$J[u]=\min_{w-\phi\in H_0^1(\Omega)} J[w]$$

或

$$D(u,v)=(f,v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

则我们把$u(x,y)$分别称为Poisson方程Dirichlet问题(2.8)、

(2.9)Ritz形式的广义解，或Galerkin形式的广义解.

变分问题(2.10)－(2.12)在力学上相应于最小势能原理；而变分形式(2.13)在力学上相应于虚功原理. 这里v是虚位移，(2.13)式的左端项表示虚内功，右端项表示虚外功. 变分问题(2.10)—(2.12)与(2.13)等价，即反映了最小势能原理与虚功原理的等价性.

由于按Galerkin形式的广义解出发去求近似解，在进行离散化和应用上更为方便，更便于推广，因此，在后面的讨论中我们都以Galerkin形式为主.

2.3 其他边值问题的变分原理

下面我们简要地论述一下有关二维Poisson方程其他类型边值问题的变分原理.

一、Neumann问题的变分原理

在广义解的意义下，下述三个问题互相等价：

(Ⅰ) 二维Poisson方程Neumann问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\Omega), & (2.16) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g, & & (2.17) \end{cases}$$

其中

$$\iint_{\Omega} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_{\partial\Omega} g\mathrm{d}s = 0. \tag{2.18}$$

(Ⅱ) 变分形式

$$\iint_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_{\partial\Omega} gv\mathrm{d}s, \quad \forall v\in H^1(\Omega). \tag{2.19}$$

(Ⅲ) 变分问题

$$J[u] = \min_{v\in H^1(\Omega)} J[v], \tag{2.20}$$

其中

$$J[v] = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} |\nabla v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.21}$$

注 在变分形式(Ⅱ)中，若取$v=1$，即有

$$0=\iint_{\Omega} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_{\partial\Omega} g\mathrm{d}s, \tag{2.22}$$

因而这是Neumann问题有解的必要条件. 同时读者应注意到Neumann问题的解不是唯一的. 若u是问题的解，则$u+c$(c为任意常数)也是解.也可以证明，问题的任意两个解的差只能是常数.

二、第三类边值问题的变分原理

在广义解的意义下，以下三个问题互相等价:

(Ⅰ) 二维Poisson方程第三类边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u=f & (\Omega), & (2.23)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+hu=g, & (\partial\Omega). & (2.24)\end{cases}$$

(Ⅱ) 变分形式

$$D(u,v)=F(v), \qquad \forall v\in H^1(\Omega), \tag{2.25}$$

其中

$$D(u,v)=\iint_{\Omega} \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_{\partial\Omega} huv\mathrm{d}s, \tag{2.26}$$

$$F(v)=\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_{\partial\Omega} gv\mathrm{d}s. \tag{2.27}$$

(Ⅲ) 变分问题

$$J[u]=\min_{v\in H^1(\Omega)} J[v], \tag{2.28}$$

其中

$$J[v]=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} hv^2\mathrm{d}s. \tag{2.29}$$

注 需要注意的是：在第二类、第三类边值问题相应的变分形式或变分问题中，解$u\in H^1(\Omega)$. 边界条件并不需要加在容许函数类上，而是作为泛函的一部分，由取泛函极值的函数自然满足的. 因此在变分法中，通常称第二类、第三类边界条件为自然边界

条件. 第一类边值问题就与此不同. 正如在Dirichlet原理中指出的, 其相应的变分形式或变分问题中的解$u\in M$, 即$u\in H^1(\Omega)$, 且$u|_{\partial\Omega}=\varphi$. 这里边界条件$u|_{\partial\Omega}=\varphi$是作为位移约束强制加在容许函数类$M$上的. 因此在变分法中, 通常称第一类边界条件为约束边界条件或强制边界条件.

现以第三类边值问题相应的变分形式为例.利用Green公式可把变分形式(Ⅱ)化成

$$\iint_\Omega(-\Delta u-f)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu-g\right)v\mathrm{d}s=0,$$
$$\forall v\in H^1(\Omega). \tag{2.30}$$

由v的任意性, 若取$v\in H_0^1(\Omega)$, 则得

$$\iint_\Omega(-\Delta u-f)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

根据变分法的基本引理, 就有

$$-\Delta u=f. \tag{2.23}$$

代入(2.30)式, 于是应有

$$\oint_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu-g\right)v\mathrm{d}s=0.$$

再由v的任意性, 在边界$\partial\Omega$上它也可取任意连续可微的函数, 根据变分法基本引理, 即得

$$\frac{\partial u}{\partial n}+hu=g\qquad(\partial\Omega). \tag{2.24}$$

由此可见, 在变分形式中, 第三类边界条件是由取泛函极值的函数所应该自然满足的.

三、间断系数问题的变分原理

很多物理问题可描述为间断系数问题. 例如, 考虑由两种不同介质组成的物体的热传导, 在二维情形可归结为下述定解问题

$$
\begin{cases}
-\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k_i\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(k_i\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}=f \qquad (\Omega_i,\ i=1,2), & (2.31)\\
u|_{\partial\Omega}=0, & (2.32)\\
[u]|_{\Gamma}=0,\left[k_i\dfrac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_{\Gamma}=0. & (2.33)
\end{cases}
$$

其中$k_i=k_i(x,y)\geqslant k_0>0$.

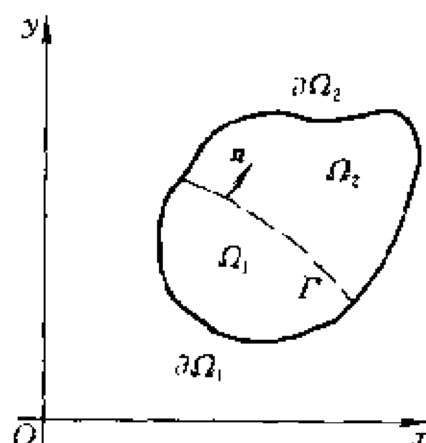


图 2-4

区域Ω被分为Ω_1和Ω_2两部分，分界线Γ是$k_i(x,y)$的间断线. 在Γ上n为指定的一个法向，边界$\partial\Omega$也对应地分成$\partial\Omega_1$和$\partial\Omega_2$两部分. 如图2-4所示. $[\cdot]|_\Gamma$表示括号[ ]中的函数在分界线Γ上的跃度. 条件$[u]|_\Gamma=0$，在热传导问题中说明温度u在Γ上是连续的；而条件$\left[k_i\dfrac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_\Gamma=0$，表示热流量沿$\Gamma$是连续的. 现在我们证明，在广义解的意义下上述定解问题(2.31)—(2.33)等价于变分形式

$$
\iint_{\Omega_1} k_1\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Omega_2} k_2\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
$$

$$
\forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.34}
$$

事实上，从方程(2.31)出发，$\forall v\in H_0^1(\Omega)$

$$
-\iint_{\Omega_i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_i\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+f\right]v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad (i=1,2),
$$

在$\Omega_i\ (i=1,2)$上，分别利用Green公式，相加得

$$
-\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}v\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial y}v\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Omega_1}(k_1\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

$$
-\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x}v\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}v\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Omega_2}(k_2\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

$$
-\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.
$$

而上式左端第一项为

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}v\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial y}v\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad =-\oint_{\Gamma+\partial\Omega_1}k_1\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{d}s \\
&\qquad =-\int_{\Gamma}k_1\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

第二项为

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x}v\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}v\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad =-\oint_{\Gamma+\partial\Omega_2}k_2\frac{\partial u}{\partial n_1}v\mathrm{d}s \\
&\qquad =\int_{\Gamma}k_2\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中$\boldsymbol{n}_1$表示$\boldsymbol{n}$的反向.由连接条件(2.33),这两项之和为零,于是即得变分形式(2.34).

同样地,我们也可以证明在广义解的意义下,上述定解问题(2.31)—(2.33)也等价于变分问题

$$
J[u]=\min_{v\in H_0^1(\Omega)}J[v], \tag{2.35}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
J[v]=&\frac{1}{2}\left(\iint_{\Omega_1}k_1|\nabla v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Omega_2}k_2|\nabla v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \\
&-\iint_{\Omega}fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

可以看出,对于间断系数的问题,其变分形式或变分问题并无特殊之处.

2.4 Lax-Milgram定理

前面我们建立了Poisson方程各类边值问题的变分原理.现在

我们进一步讨论这些相应的变分问题的适定性：即广义解的存在性(至少有一个解)、唯一性(至多有一个解)和稳定性(解对定解条件的连续依赖性). 对于微分方程定解问题的适定性问题，在一般的数学物理方程书中都有所论及. 但由于变分问题的解(即定解问题的广义解)是在比定解问题的解更广的一类函数空间中获得的. 因而其唯一性和稳定性是否能得到保证是需要作进一步讨论的.

为叙述简洁起见，我们先对一般形式的变分问题建立所谓的Lax－Milgram定理，然后作为这一定理的应用，对Poisson方程Dirichlet问题和Neumann问题相应的变分形式，讨论其适定性.

定理 10 (Lax－Milgram定理) 设H是一个Hilbert空间，$B(u,v)$是H上的双线性形式(即双线性泛函)，具有性质:

i) 对称性. 即$B(u,v)=B(v,u)$;

ii) 有界性. 即$|B(u,v)|\leqslant M\|u\|\cdot\|v\|, 0<M<\infty$;

iii) 正定性. 即$B(u,u)\geqslant\gamma\|u\|^2, \quad \gamma>0$.

又$F(v)$是H上的有界线性泛函. 则存在唯一$u_0\in H$，使得

$$B(u_0,v)=F(v), \qquad \forall v\in H$$

成立. 且有估计

$$\|u_0\|\leqslant\frac{1}{\gamma}\|F\|. \tag{2.37}$$

证明 由$B(u,v)$的对称性和正定性，可定义

$$[u,v]=B(u,v)$$

作为空间H上的新的内积. 又由$B(u,v)$的有界性和正定性，有

$$\gamma\|u\|^2\leqslant[u,u]\leqslant M\|u\|^2.$$

由此可见，新内积确定的模$\|u\|_A=\sqrt{[u,u]}$与H中原来的模$\|u\|$等价. 故$F(v)$对于新的模$\|v\|_A$仍是有界线性泛函. 根据Riesz表示定理知，存在唯一$u_0\in H$，使

$$F(v)=[u_0,v], \qquad \forall v\in H,$$

即

$$B(u_0,v)=F(v), \qquad \forall v\in H,$$

成立.

又

$$\gamma\|u_0\|_1^2\leqslant B(u_0,u_0)=[u_0,u_0]=F(u_0)\leqslant\|F\|\cdot\|u_0\|_1,$$

即得估计式(2.37).

附注 在Lax－Milgram定理中,若去掉双线性形式$B(u,v)$具有对称性的假设条件,仍可证明定理的结论成立.由于要用到较多的泛函分析知识,这里从略.前面我们曾说过,Galerkin形式的广义解比Ritz形式的广义解更便于推广.一个重要的推广就是它可以不要求双线性形式$B(u,v)$对称.

下面我们利用Lax－Milgram定理,来讨论Poisson方程Dirichlet问题和Neumann问题相应变分问题的适定性,且对变分问题都采用Galerkin变分形式.

定理 11 如果$f\in L_2(\Omega)$,则Poisson方程Dirichlet问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & (\Omega), & (2.8)\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi & & (2.9)\end{cases}$$

的变分形式

$$D(u,v)=(f,v),\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega)\tag{2.13}$$

在广义解的意义下是适定的.

证明 将给定的函数φ延拓成ϕ: $\phi\in H^1(\Omega)$,且$\phi|_{\partial\Omega}=\varphi$.令$w=u-\phi$,则$w\in H_0^1(\Omega)$.

求定解问题(2.8)、(2.9)Galerkin形式的广义解,即求$w\in H_0^1(\Omega)$,使

$$D(w,v)=(f,v)-D(\phi,v),\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega).\tag{2.38}$$

记

$$B(w,v)=D(w,v),$$

$$F(v)=(f,v)-D(\phi,v).$$

$B(w,v)$是Hilbert空间$H_0^1(\Omega)$上的双线性泛函,对称性是显然的.因为

$$|B(w,v)|=|D(w,v)|=\left|\iint\limits_{\Omega}\nabla w\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \left(\iint_{\Omega} |\nabla w|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \|w\|_1 \|v\|_1, \tag{2.39}$$

所以$B(w,v)$有界.又由等价模定理知,在$H_0^1(\Omega)$中模$\|v\|_1$与$\|\nabla v\|_{L_2}$等价,即有

$$\alpha\|v\|_1^2 \leqslant \|\nabla v\|_{L_2}^2 = \iint_{\Omega} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

其中α是与v无关的常数.故有

$$B(v,v) \geqslant \alpha\|v\|_1^2, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.40}$$

即$B(w,v)$正定.

而由

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leqslant |(f,v)| + |D(\phi, v)| \\ &\leqslant \|f\|_{L_2} \cdot \|v\|_{L_2} + \|\phi\|_1 \cdot \|v\|_1 \\ &\leqslant (\|f\|_{L_2} + \|\phi\|_1)\|v\|_1, \end{aligned} \tag{2.41}$$

可见$F(v)$是$H_0^1(\Omega)$上的有界线性泛函.

于是,根据Lax－Milgram定理,变分形式(2.38)的广义解w存在、唯一,且有估计式

$$\|w\|_1 \leqslant \frac{1}{\alpha}(\|f\|_{L_2} + \|\phi\|_1),$$

即有变分形式(2.13)的广义解u存在、唯一,且

$$\|u\|_1 \leqslant \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)(\|f\|_{L_2} + \|\phi\|_1). \tag{2.42}$$

这表明解u连续依赖于定解条件,因此定解问题(2.8)、(2.9)在广义解的意义下是适定的.

定理12 如果$f \in L_2(\Omega)$,则Poisson方程Neumann问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\Omega), & (2.16) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g, & & (2.17) \end{cases}$$

在满足条件

$$\iint_{\Omega} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_{\partial\Omega} g\mathrm{d}s = 0. \tag{2.18}$$

时,相应变分形式

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_{\partial\Omega} gv\mathrm{d}s, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.19}$$

的广义解在相差一个常数的意义下是存在唯一的.

证明 类似定理11的证明,可知

$$F(v) = \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_{\partial\Omega} gv\mathrm{d}s \tag{2.43}$$

是$H^1(\Omega)$上的有界线性泛函,且

$$B(u,v) = D(u,v) = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.44}$$

是$H^1(\Omega)$上对称、有界的双线性泛函.但此时$B(u,v)$不是正定的.容易看出解的唯一性已不成立,因为若u是解,则$u+c$(c是任意常数)也是解.为了保证解的唯一性,需再附加条件

$$\iint_{\Omega} u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{2.45}$$

在$H^1(\Omega)$的子空间

$$H_*(\Omega) = \{v(x,y) | v \in H^1(\Omega), 且 \iint_{\Omega} v\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\} \tag{2.46}$$

上考虑变分形式的解.即求$u \in H_*(\Omega)$,使

$$B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H_*(\Omega) \tag{2.47}$$

成立.根据Poincaré不等式(1.31)知

$$\|v\|_1^2 \leqslant c^2\left[\iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left(\iint_{\Omega} v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2\right]$$

$$= c^2 \iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c^2 B(v,v), \quad \forall v \in H_*(\Omega),$$

即有

$$B(v,v) \geqslant \frac{1}{c^2}\|v\|_1^2, \quad \forall v \in H_*(\Omega).$$

故$B(u,v)$在$H_*(\Omega)$上是正定的.

利用Lax－Milgram定理知，变分形式(2.47)的解$u\in H_*(\Omega)$是存在、唯一的.但是(2.47)的解不一定就是原问题(2.19)的解，因为只对于空间$H_*(\Omega)$成立，对全空间$H^1(\Omega)$未必成立.但当条件(2.18)满足时，可证所述边值问题(2.16)、(2.17)的变分形式的广义解存在，且在相差一个常数的意义下是唯一的.

这是因为在(2.19)中，若取$v=1$(显然$v\in H^1(\Omega)$)，则有

$$\iint\limits_{\Omega} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_{\partial\Omega} g\mathrm{d}s=0\ . \tag{2.18}$$

这表明条件(2.18)是原问题有解的必要条件.反之，若条件(2.18)满足时，可证(2.47)的解就是原问题的解.

事实上，对于任意一个函数$v\in H^1(\Omega)$，总存在着常数$c_v=-\frac{1}{S}\iint\limits_{\Omega} v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$($S$为区域$\Omega$的面积)，使$v+c_v\in H_*(\Omega)$.由于对任意常数$c$，有

$$B(u,c)=0,\qquad \forall u\in H^1(\Omega),$$

利用条件(2.18)可得

$$F(c)=0.$$

故对于(2.47)的解u，有

$$\begin{aligned}0&=B(u,v+c_v)-F(v+c_v)\\&=B(u,v)-F(v),\qquad \forall v\in H^1(\Omega),\end{aligned}$$

因而就是原问题(2.19)的解.且由于(2.47)的解是唯一的，即得定解问题(2.16)、(2.17)的广义解在相差一个常数的意义下唯一.

2.5 广义解的可微性

众所周知，如果偏微分方程的系数和非齐次项充分光滑，那么广义解在区域Ω内部任一闭子域上可以具有更高阶的广义微商.此外，若区域的边界$\partial\Omega$与边界条件又充分光滑，那么广义解在整个区域$\overline{\Omega}$上具有高阶广义微商.限于篇幅，在这里仅以Poisson方程Dirichlet问题为例，作一些说明.

先介绍一个区域Ω(有时也称边界$\partial\Omega$)光滑性的概念.

设Ω是N维区域,对任意边界点$P\in\partial\Omega$,如果存在一个邻域U_P,使得$U_P\cap\partial\Omega$可在以点P为原点的局部坐标系$\{y_1,\cdots,y_{N-1},y_N\}$下(这里$y_i$ $(1\leqslant i\leqslant N-1)$轴在点$P$的切平面上,$y_N$轴是点$P$处的外法向)表示为

$$y_N=w(y_1,\cdots,y_{N-1})$$

的形式.若$w(y_1,\cdots,y_{N-1})$在$U_P\cap\partial\Omega$在点P切平面上投影区域内,对$y_1,\cdots,y_{N-1}$是n次连续可微的,则称$\Omega\in C^{(n)}$.

对于Poisson方程Dirichlet问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & (\Omega),\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

有如下的结果:

1° 若$\varphi\equiv 0$, $\Omega\in C^{(2+k)}$, $f\in H^k(\Omega)$,则$u\in \overset{\circ}{H^1}(\Omega)\cap H^{2+k}(\Omega)$,且有估计

$$\|u\|_{2+k}\leqslant M_k\|f\|_k.$$

这里M_k是只与Ω有关的常数.

2° 若$\varphi\not\equiv 0$, $\Omega\in C^2$或是平面上的凸多角形,当$f\in L_2(\Omega)$, φ在Ω内存在延拓ϕ,具有$\Delta\phi\in L_2(\Omega)$时,则$u\in H^2(\Omega)$且有估计

$$\|u\|_2\leqslant M_2(\|f\|_{L_2}+\|\Delta\phi\|_{L_2}).$$

§3. 变分问题的几种近似解法

在上一节中我们建立了数学物理方程各种类型定解问题与相应变分问题等价的变分原理,从而可把求定解问题的解转化为求相应变分问题的解.由于求定解问题的精确解常是一件较困难的事,而对于变分问题我们有多种近似解法,这样就可以得到原定解问题的近似广义解.本节将介绍几种常用的求解方法.

3.1 Ritz方法

考虑Ritz形式的变分问题:求解变分问题

$$J[u]=\min_{v\in H(\Omega)} J[v], \tag{3.1}$$

其中区域$\Omega\subset R^n$，$H(\Omega)$为Hilbert空间，且假定$H(\Omega)=H_0^1(\Omega)$，泛函

$$J[v]=\frac{1}{2}D(v,v)-F(v)$$
$$=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega fv\mathrm{d}x, \tag{3.2}$$

而$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

Ritz方法的基本思想是：不把泛函$J[v]$的极值放在容许函数空间$H(\Omega)$中考虑，因为$H(\Omega)$是无穷维函数空间，直接求解有困难，而是在$H(\Omega)$内找一个有限维的子空间S_N，其维数为N.选取S_N上的一组基函数$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N$，则$S_N$可表示成这组基函数所生成的空间，记作

$$S_N=\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N\}$$
$$=\{u\mid u=\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i, c_i\in\mathbf{R}\}. \tag{3.3}$$

于是，对任意$v_N\in S_N$，有

$$v_N=\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i, \tag{3.4}$$

其中c_i $(i=1,2,\cdots,N)$是任意实常数.

在S_N上求变分问题(3.1)、(3.2)的近似解u_N，即求$u_N\in S_N$，使得

$$J[u_N]=\min_{v_N\in S_N}J[v_N], \tag{3.5}$$

而

$$J[v_N]=\frac{1}{2}D(v_N,v_N)-F(v_N)$$
$$=\frac{1}{2}D\Big(\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i,\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i\Big)-F\Big(\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N D(\varphi_i,\varphi_j)c_ic_j-\sum_{i=1}^N F(\varphi_i)c_i \tag{3.6}$$

记矩阵$\boldsymbol{A}$和列向量$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{F}$分别为

$$\boldsymbol{A}=[\,a_{ij}\,]_{N\times N}=[\,D(\varphi_i\,,\varphi_j\,)\,]_{N\times N},$$

$$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} F(\varphi_1) \\ F(\varphi_2) \\ \vdots \\ F(\varphi_N) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

则

$$J[\,v_N\,]=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{F}\,. \tag{3.8}$$

这样把求泛函$J[\,v_N\,]$的极小值问题，转化为求以c_1、c_2、$\cdots$，c_N为自变量的二次函数$j(c_1,c_2,\cdots,c_N)$的极小值问题.

我们先验证矩阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵.

引理2 矩阵$\boldsymbol{A}=[\,D(\varphi_i\,,\varphi_j\,)\,]_{N\times N}$是正定的.

证明 因为对任意的向量$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_N)^{\mathrm{T}}$，有

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}=D(v_N,v_N)=D\Big(\sum_{i=1}^{N}c_i\,\varphi_i\,,\sum_{i=1}^{N}c_i\,\varphi_i\Big)$$

$$=\int_{\Omega}\Big|\nabla\Big(\sum_{i=1}^{N}c_i\,\varphi_i\,\Big)\Big|^2\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

而$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{c}=0$当且仅当$\nabla\Big(\sum\limits_{i=1}^{N}c_i\,\varphi_i\,\Big)=0$时成立.由于$\sum\limits_{i=1}^{N}c_i\,\varphi_i\in H(\Omega)$，由假设$H(\Omega)=H_0^1(\Omega)$，故亦即当且仅当$\sum\limits_{i=1}^{N}c_i\,\varphi_i=0$时成立.由于$\varphi_1$，$\varphi_2$、$\cdots$，$\varphi_N$是线性无关的，从而必有

$$c_i=0\qquad(i=1,2,\cdots,N).$$

即当且仅当$\boldsymbol{c}=0$时$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}=0$，故矩阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵.

矩阵$\boldsymbol{A}$的正定性，保证了二次函数$j(c_1,c_2,\cdots,c_N)$的极小值一定存在，根据多元函数取极值的必要条件，若$J[\,v_N\,]$在$\boldsymbol{c}^0=(c_1^0,c_2^0,\cdots,c_N^0)^{\mathrm{T}}$达到极小值，则应有

$$\frac{\partial J[\,v_N\,]}{\partial c_i}\bigg|_{(c_1^0,c_2^0,\cdots,c_N^0)}=0\qquad(i=1,2,\cdots,N).$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{F}. \tag{3.9}$$

因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，上述代数方程组有唯一解，于是

$$u_N=\sum_{i=1}^{N}c_i^0\varphi_i \tag{3.10}$$

就是变分问题(3.1)、(3.2)的近似解.

3.2 Galerkin方法

考虑变分的Galerkin形式：求解 $u\in H(\Omega)$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$H(\Omega)$ 为Hilbert空间，使得

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\quad \forall v\in H(\Omega). \tag{3.11}$$

或写成更一般形式

$$D(u,v)=F(v),\qquad \forall v\in H(\Omega). \tag{3.12}$$

所谓Galerkin方法，其基本思想与Ritz方法一样，选取 $H(\Omega)$ 中的一个有限维子空间 S_N，

$$S_N=\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N\},$$

其中 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N$ 是 N 个线性无关的基函数. 在 S_N 中寻求变分形式(3.12)的近似解 u_N，即 $u_N\in S_N$，使得

$$D(u_N,v_N)=F(v_N),\qquad \forall v_N\in S_N. \tag{3.13}$$

取 $v_N=\varphi_j$ $(j=1,2,\cdots,N)$，并设变分形式(3.12)的近似解

$$u_N=\sum_{i=1}^{N}c_i^0\varphi_i \tag{3.14}$$

为确定系数 $c_i^0(i=1,2,\cdots,N)$，把 v_N、u_N 代入(3.13)式，即得方程组

$$\begin{aligned}D(u_N,v_N)-F(v_N)&=D\Big(\sum_{i=1}^{N}c_i^0\varphi_i,\varphi_j\Big)-F(\varphi_j)\\&=\sum_{i=1}^{N}D(\varphi_i,\varphi_j)c_i^0-F(\varphi_j)\\&=0\qquad (j=1,2,\cdots,N).\end{aligned} \tag{3.15}$$

采用式(3.7)中的记号，上式即为

$$Ac^0 = F. \tag{3.16}$$

这是与Ritz方法同一个代数方程组.

从上面线性代数方程组(3.15)的导出过程可见，Galerkin方法对双线性形式$D(u,v)$并不一定要有对称、正定的条件限制，因此，这时的矩阵A也不一定是对称、正定的.

古典的变分方法，无论是Ritz方法还是Galerkin方法，都有一个共同的特点：所得到的近似解u_N都是解u在N维子空间S_N上的最佳逼近元，且u_N按能量模收敛到广义解u. 下面我们对Galerkin意义下的近似解建立投影性质及收敛性定理. 由于在$D(u,v)$对称、正定的条件下，Ritz方法与Galerkin方法是等价的，因而也有相同的结论.

定理13 （投影性质） 设u是Galerkin意义下的广义解，u_N是用Galerkin方法得到的近似解，则当S_N是Hilbert空间$H(\Omega)$的子空间时，u_N是u在S_N上的投影，即

$$[u-u_N, w_N]=0, \qquad \forall w_N \in S_N, \tag{3.17}$$

$$\|u-u_N\|_H = \inf_{w_N \in S_N} \|u-w_N\|_H, \tag{3.18}$$

其中$[,]$表示能量内积，即

$$[u,v]=D(u,v)=\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$\|\cdot\|_H$是能量模，即$\|u\|_H=\sqrt{[u,u]}$.

证明 由u, u_N的定义，有

$$D(u,w)=F(w), \qquad \forall w \in H(\Omega), \tag{3.19}$$

$$D(u_N,w_N)=F(w_N), \qquad \forall w_N \in S_N. \tag{3.20}$$

由于$S_N \subset H(\Omega)$，因此在式(3.19)中可取$w=w_N \in S_N$，得

$$D(u,w_N)=F(w_N).$$

与式(3.20)相减，使得

$$D(u-u_N, w_N)=0, \qquad \forall w_N \in S_N.$$

此即证明了式(3.17)成立.

再证式(3.18)成立. 任取$w_N \in S_N$，由能量模的定义

$$
\begin{aligned}
\|u-u_N\|_H^2 &= D(u-u_N, u-u_N) \\
&= D(u-u_N, u-w_N)+D(u-u_N, w_N-u_N).
\end{aligned}
$$

因为$w_N-u_N\in S_N$，故由(3.17)式知等式右端第二项为零.从而有

$$
\begin{aligned}
\|u-u_N\|_H^2 &= D(u-u_N, u-w_N) \\
&= [u-u_N, u-w_N] \\
&\leqslant \|u-u_N\|_H \cdot \|u-w_N\|_H,
\end{aligned}
$$

即得

$$
\|u-u_N\|_H \leqslant \|u-w_N\|_H.
$$

而当取$u_N=w_N$时，上式等号成立，故有

$$
\|u-u_N\|_H = \inf_{w_N\in S_N} \|u-w_N\|_H.
$$

这个定理的结论表明：近似解u_N是解u在N维子空间S_N上的正交投影，因而也就是解u在S_N上的最佳逼近元.

定理 14 （收敛性定理）如果$S_1\subset S_2\subset\cdots\subset S_N\subset\cdots$是包含在Hilbert空间$H=H(\Omega)$内的有限维子空间序列，且$\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} S_N}=H$.即对任意$u\in H$，存在一个序列$\{\tilde{u}_N\}$，使$\tilde{u}_N\in S_N(N=1,2,\cdots)$，而

$$
\lim_{N\to\infty} \|\tilde{u}_N-u\|_H=0.
$$

则由Galerkin方法得到的近似解u_N必按能量模收敛到广义解u，即

$$
\lim_{N\to\infty} \|u-u_N\|_H=0.
$$

证明 设u是广义解，$u\in H$.根据定理条件，一定存在序列$\{\tilde{u}_N\}$，使

$$
\|\tilde{u}_N-u\|_H\to 0 \qquad (N\to\infty),
$$

根据投影性质，在式(3.18)中取$w_N=\tilde{u}_N$，便有

$$
\|u-u_N\|_H\leqslant\|u-\tilde{u}_N\|_H\to 0 \qquad (N\to\infty).
$$

上述收敛性定理表明：只要有限维子空间S_N无限地逼近H，使得$\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} S_N}=H$，则所得的近似解按能量模收敛于广义解，且

(3.18)式还表明对解的误差估计可直接转化为对解的逼近度的估计.

Ritz方法和Galerkin方法作为求变分问题近似解的方法，有它的优点，也存在缺点.例如，优点有:

(1) 如果双线性形式$D(u,v)$是对称、正定的，那末由Ritz-Galerkin方法得到的代数方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A}$仍保持对称、正定;

(2) 对自然边界条件，如第二、三类边界条件，不必作为变分问题的约束进行处理.这样可以避免由于在边界条件中解的法向微商的离散化所带来的困难.

但是，Ritz－Galerkin方法亦存在下列缺点:

(1) 对于第一类边值问题，边界条件是作为变分问题的容许函数类所应满足的约束条件来考虑的.这样对于有限维子空间S_N的构造带来很大的困难.因为除了一些规则的区域外，要选取满足边界条件的基函数常常是很难办到;

(2) 系数矩阵A一般不是稀疏的(即零元素较少).当方程组的阶数较高时，矩阵元素的形成需要计算大量的积分，因而计算量及计算机的存储量都相当大.

由于这些缺点，影响了这两个方法的实用价值.本世纪60年代中期以来迅速发展的有限元方法，提供了选取基函数的新思路，克服了传统的Ritz－Galerkin方法的缺点.

3.3 有限元方法

有限元方法是古典变分法(Ritz－Galerkin方法)与分片多项式插值相结合的产物.由于选择了特殊的基函数，使它能适应一般的区域.有限元方法基于变分原理，又具有差分方法的一些特点，并适合于较复杂的区域和大小不同的网格.正是由于这些特点，有限元方法有着广泛的应用，已成为当前求数学物理方程定解问题数值解的一个重要方法.

在本节中，以二维Poisson方程第一边值问题

$$
\begin{cases} -\Delta u = f & (x,y)\in\Omega, \quad (3.21) \\ u|_{\partial\Omega}=0 & \quad (3.22) \end{cases}
$$

为例，阐述用有限元方法求相应变分问题

$$
[u,v]-(f,v)=0, \qquad \forall\, v\in H_0^1(\Omega) \tag{3.23}
$$

近似解的主要步骤.

一、区域的剖分

用有限元方法解二维问题，比较简单而且应用较普遍的是将区域$\bar{\Omega}$作三角形剖分，即分成有限个互相不重叠的三角形元素如图2－5所示.需要注意的是不能把一个三角形的顶点取为另一个相邻三角形的边的内点，即如图2－6的剖分是不允许的.在剖分时尽量不要出现大钝角三角形，否则将会影响计算的精确度.在预计Ω中未知函数u变化剧烈的部分，可在该处将网格取得密些.这样的剖分要遍及整个区域直至边界，当边界$\partial\Omega$为曲线时，以折线来代替.

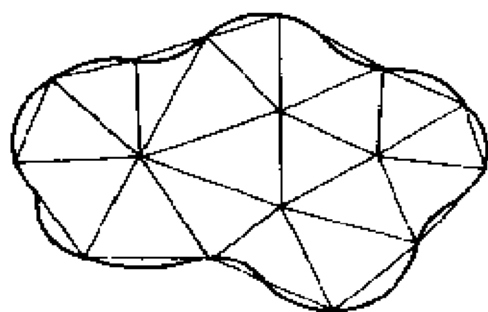


图 2－5

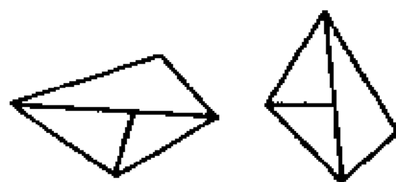


图 2－6

上述剖分后的每一个三角形称为一个单元，所有单元的顶点称为节点.在Ω内部的节点称为内节点，在边界$\partial\Omega$上的节点称为边界节点.所有单元的全体记为Ω_h，它的边界$\partial\Omega_h$是一条封闭折线.单元若有一条边落在$\partial\Omega_h$上，称它为边界单元.

区域$\bar{\Omega}$剖分后，对节点和单元进行编号.设共有N_e个单元，记为e_k $(k=1,2,\cdots,N_e)$，有N_p个节点，记为P_i，其坐标为

$(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,N_p)$. 每个单元$e$的三个顶点编号$i[e]$、$j[e]$和$k[e]$按逆时针顺序，如图2－7所示. 为统一计算格式，在边界单元规定落在$\partial\Omega_h$上的一边所对的顶点编号为$i[e]$，即放在单元三个节点的第一个位置.

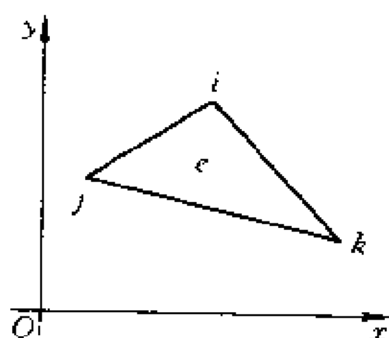


图 2－7

二、线性插值基函数

我们现在构造一个函数空间U_h，要求$\forall v_h \in U_h$满足：

1° v_h在Ω_h上连续，且$v_h|_{\partial\Omega}=0$；

2° 在每个单元$e_k(k=1,2,\cdots,N_e)$上，v_h是x、y的一次多项式.

具有这种性质的函数v_h是分片线性函数. 可以验证U_h是一个线性空间.

我们先讨论U_h中函数在一个单元e上的表达式. 设e是任意一个单元，未知函数$u(x,y)$在其三个顶点$P_i(x_i, y_i)$、$P_j(x_j, y_j)$和$P_k(x_k, y_k)$处的值依次为$u_i(x_i, y_i)$、$u_j(x_j, y_j)$和$u_k(x_k, y_k)$. 三个顶点按逆时针顺序排列保证了三角形Δ_e的面积可表示为

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}>0. \tag{3.24}$$

在单元e上构造线性插值函数，即在单元e上，令

$$u^{(e)}(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y. \tag{3.25}$$

由方程组

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 x_i+\alpha_3 y_i=u_i, \\ \alpha_1+\alpha_2 x_j+\alpha_3 y_j=u_j, \\ \alpha_1+\alpha_2 x_k+\alpha_3 y_k=u_k \end{cases}$$

可唯一确定α_1、α_2、α_3，得

$$\begin{cases} \alpha_1=\dfrac{1}{2\Delta}(a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k), \\ \alpha_2=\dfrac{1}{2\Delta}(b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k), \\ \alpha_3=\dfrac{1}{2\Delta}(c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k), \end{cases} \tag{3.26}$$

其中

$$\begin{aligned} &a_i = x_j y_k - x_k y_j, a_j = x_k y_i - x_i y_k, a_k = x_i y_j - x_j y_i; \\ &b_i = y_j - y_k, b_j = y_k - y_i, b_k = y_i - y_j; \\ &c_i = x_k - x_j, c_j = x_i - x_k, c_k = x_j - x_i. \end{aligned} \tag{3.27}$$

于是，得到在单元e上的插值函数

$$u^{(e)}(x,y)=N_i(x,y)u_i + N_j(x,y)u_j + N_k(x,y)u_k, \tag{3.28}$$

其中

$$\begin{cases} N_i(x,y)=\dfrac{1}{2\Delta}(a_i + b_i x + c_i y), \\ N_j(x,y)=\dfrac{1}{2\Delta}(a_j + b_j x + c_j y), \\ N_k(x,y)=\dfrac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y). \end{cases} \tag{3.29}$$

我们称$N_i(x,y)$、$N_j(x,y)$、$N_k(x,y)$为单元e上的线性插值基函数. 不难验证

$$N_m(x_l, y_l)=\delta_{ml}=\begin{cases} 0, & m\neq l; \\ 1, & m=l. \end{cases} \tag{3.30}$$

$$(m, l=i, j, k).$$

它们的几何图形如图2－8所示，称为形函数.

在每一个节点P_i处，用以它为公共顶点的单元上的形函数确定一个高度为1，而在其它单元上取零值的角锥函数$\varphi_i(x,y)$(也称屋顶函数)，如图2－9所示. 把这样的函数取为函数空间U_h

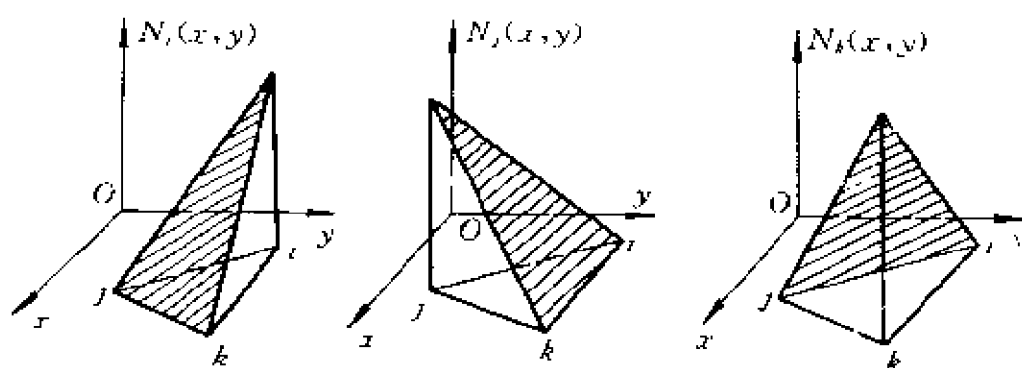


图 2-8

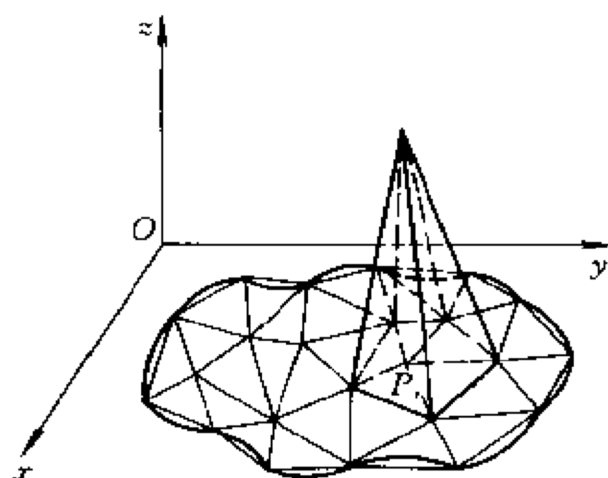


图 2-9

的一个基函数. 于是, 每一个基函数对应一个节点. 如果点P_i是边界节点, 则"角锥"在边界$\partial\Omega_h$上的某些平面将是铅直的. 而在第一类齐次边界条件$u|_{\partial\Omega}=0$的情形, 只需在每一个内节点上建立相应的一个基函数即可. 设内节点总数为N, 显然有

$$\varphi_i(x,y)|_{\partial\Omega_h}=0, \qquad \varphi_i\in H_0^1(\Omega) \qquad (i=1,2,\cdots,N).$$

且$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N$线性无关. 于是

$$U_h=S_N=\text{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N\}, \tag{3.31}$$

即$\forall u_N\in S_N$, 有

$$u_N=\sum_{i=1}^{N}c_i\varphi_i(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega_h, \tag{3.32}$$

其中c_i是u_N在点P_i处的值. 我们称空间S_N为试探函数空间, 它是

$H_0^1(\Omega)$的一个有限维子空间.

三、有限元方程的形成

在建立了试探函数空间S_N后，我们在有限维子空间S_N上求变分问题(3.23)的近似解u_N，使得

$$[u_N,v_N]-(f,v_N)=0,\quad \forall v_N\in S_N, \tag{3.33}$$

亦即

$$[u_N,\varphi_i]=(f,\varphi_i),\quad i=1,2,\cdots,N. \tag{3.34}$$

记

$$\boldsymbol{A}=([\varphi_i,\varphi_j])_{N\times N},$$

$$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_N\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_1)\\(f,\varphi_2)\\\vdots\\(f,\varphi_N)\end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

则

$$\boldsymbol{Ac}=\boldsymbol{f}. \tag{3.36}$$

上式称为有限元方程，人们通常采用力学名词，把$\boldsymbol{A}$称为刚度矩阵，$\boldsymbol{f}$称为荷载向量.

在具体计算刚度矩阵$\boldsymbol{A}$时，先采用单元分析，即在每一个单元e上算出$[\varphi_i,\varphi_j]$，得到的$\boldsymbol{A}^{(e)}$称为单元刚度矩阵.由各个单元刚度矩阵在对应位置叠加，即将每个单元的"贡献"叠加起来，得到在Ω_h上的总刚度矩阵$\boldsymbol{A}$.

同样地，先在每个单元e上计算出(f,φ_i)，得到单元荷载向量$\boldsymbol{f}^{(e)}$，再在Ω_h上合成总荷载向量$\boldsymbol{f}$.

由于基函数φ_i的特性，这样得到的矩阵$\boldsymbol{A}$是一个稀疏矩阵，并可以证明它是一个对称、正定矩阵.

四、求解有限元方程

有限元方程(3.36)是一个代数方程组，具有对称、正定的系数矩阵$\boldsymbol{A}$.解出$c_1,c_2,\cdots,c_N$.就得到变分问题(3.23)的近似解

$$u_N=\sum_{i=1}^{N}c_i\varphi_i(x,y). \tag{3.37}$$

由于$c_1, c_2, \cdots, c_N$恰好是u_N在节点$P_1, P_2, \cdots, P_N$处的函数值，故c_i $(i=1,2,\cdots,N)$的力学意义是在点P_i处的位移.

五、有限元解的误差估计

设u是微分方程边值问题的广义解，u_N是用有限元方法得到的近似解，Πu是解u的分片多项式插值，Π表示插值算子，u_N、$\Pi u \in S_N$. 根据Ritz－Galerkin方法的解u的投影性质(定理13)的结论(3.18)，有

$$\|u-u_N\|_H \leqslant \|u-\Pi u\|_H,$$

即

$$D(u-u_N, u-u_N) \leqslant D(u-\Pi u, u-\Pi u). \tag{3.38}$$

因此，在能量模的度量下，有限元解的误差估计可由插值误差来估计.从而把有限元解的误差估计归结为函数的逼近论问题.

为使叙述简单起见，我们论证一维情形有限元解的收敛性，给出误差的先验估计.其论证的步骤及思想方法也适用于二维情形.

考虑一维情形的定解问题

$$\begin{cases} -u''+cu=f(x), \quad 0<x<l, & (3.39) \\ u(0)=0, \quad u'(l)=P, & (3.40) \end{cases}$$

其中$f \in L_2(0,l)$，$c>0$，P是已知常数.

记

$$H_0^1(0,l)=\{u(x) \mid u \in H^1(0,l), \text{且} u(0)=0\}, \tag{3.41}$$

上述定解问题相应变分的Galerkin形式为

$$D(u,v)=F(v), \qquad \forall v \in H_0^1(0,l) \tag{3.42}$$

成立，其中

$$D(u,v)=\int_0^l (u'v'+cuv)\mathrm{d}x, \tag{3.43}$$

$$F(v)=Pv(l)+\int_0^l fv\mathrm{d}x. \tag{3.44}$$

我们知道，当$f(x) \in L_2(0,l)$时，有且只有一个函数$u \in H^2(0,l)$，使(3.42)成立.

在 $[0,l]$ 中插入 $N-1$ 个分点 $x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$，并记 $x_0=0$，$x_N=l$，把 $[0,l]$ 分成 N 个小区间 $e_i=[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,N)$，记

$$h=\max_{1\leqslant i\leqslant N}|x_i-x_{i-1}|, \tag{3.45}$$

在 $[0,l]$ 上定义折线函数类 S_N，$\forall v_N\in S_N$ 有性质：

1° $v_N(0)=0$;

2° 在 $e_i=[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 上 v_N 是线性函数;

3° $v_N(x)\in C[0,l]$.

设 Πu 是 u 的分段线性插值函数，即在 $e_i=[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 上 Πu 是线性函数，且

$$\Pi u(x_i)=u(x_i) \qquad (i=0,1,2,\cdots,N).$$

即有 $\Pi u\in S_N$. 记 $E=u-\Pi u$. 由于 $E(x_{i-1})=E(x_i)=0$，在 $e_i=[x_{i-1}, x_i]$ 上由 Rolle 定理知，存在 $\bar{x}_i\in(x_{i-1}, x_i)$ 使 $E'(\bar{x}_i)=0$. 因为在每个小区间 e_i 上 Πu 是线性函数，故 $\dfrac{d^2(\Pi u)}{dx^2}=0$，$\dfrac{d^2E}{dx^2}=\dfrac{d^2u}{dx^2}$. 于是

$$|E'(x)|=\left|\int_{\bar{x}_i}^{x}E''(t)dt\right|=\left|\int_{\bar{x}_i}^{x}u''(t)dt\right|$$
$$\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}|u''(t)|dt\leqslant h^{1/2}|u|_{2,[x_{i-1},x_i]},$$

其中

$$|u|_{2,[x_{i-1},x_i]}=\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}(u'')^2dt\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.46}$$

故

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{dE}{dx}\right)^2dx\leqslant h^2|u|^2_{2,[x_{i-1},x_i]}.$$

同样地，有

$$|E(x)|=\left|\int_{x_i}^{x}E'(t)dt\right|\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}|E'(t)|dt$$

$$\leqslant h^{1/2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}(E')^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

故

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}E^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}h^3\,|u|_{2,[x_{i-1},x_i]}^2\,\mathrm{d}x\leqslant h^4\,|u|_{2,[x_{i-1},x_i]}^2,$$

从而

$$\int_0^l E^2\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^N\int_{x_{i-1}}^{x_i}E^2\mathrm{d}x\leqslant h^4\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x=h^4\,|u|_{2,[0,l]}^2.$$

$$\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^N\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant h^2\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x=h^2\,|u|_{2,[0,l]}^2.$$

于是，按能量模，有

$$\|u-\Pi u\|_H=\|E\|_H=\left\{\int_0^l\left[\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)^2+cE^2\right]\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant Mh\,|u|_{2,[0,l]}. \tag{3.47}$$

其中M是与h无关的常数.

由于

$$\|u-u_N\|_H\leqslant\|u-\Pi u\|_H,$$

即得

$$\|u-u_N\|_H\leqslant Mh|u|_{2,[0,l]}. \tag{3.48}$$

或因为 $|u|_{2,[0,l]}\leqslant\|u\|_{2,[0,l]}$，其中

$$\|u\|_{2,[0,l]}=\left\{\int_0^l\left[u^2+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.49}$$

有时也将上述估计式载成

$$\|u-u_N\|_H\leqslant Mh\|u\|_{2,[0,l]}. \tag{3.50}$$

估计式(3.48)(或(3.50))表明，在分段线性插值函数类S_N中得到的有限元解u_N，在能量模意义下趋于广义解u的阶是h的一次方.

对于二维情形椭圆型方程边值问题相应的变分问题，其有限元解的误差估计也有类似的结论:

$$\|u-u_N\|_H\leqslant Mh\|u\|_2, \tag{3.51}$$

其中h是单元边的最大长度，M是与区域Ω的形状以及单元的最大内角有关，而与h无关的常数.

§4. 发展方程的变分方法

对依赖时间变量的方程，如抛物型、双曲型方程等，我们统称为发展方程.它们的定解问题的求解，也可从等价的变分形式(弱形式)出发，然后利用半离散化的近似方法将它化为常微分方程组求解，以及进一步全离散化转化为代数方程组求解.

4.1 弱形式

首先考虑二维抛物型方程的定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(x,y,t), \qquad (x,y)\in\Omega, & (4.1)\\ u|_{\partial\Omega}=0, & (4.2)\\ u|_{t=0}=u^0(x,y), & (4.3)\end{cases}$$

其中区域$\Omega\subset\mathbf{R}^2$，$t\in[0,T]$.

上述定解问题的弱形式为：寻求$u(x,y,t)$使对任一满足零边值条件的函数$\varphi(x,y)\in H_0^1(\Omega)$满足下面的关系式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,\varphi)+(\nabla u,\nabla\varphi)=(f,\varphi), & (4.4)\\ (u,\varphi)|_{t=0}=(u^0,\varphi). & (4.5)\end{cases}$$

请注意：由于我们不准备引入抽象函数空间，因此这里对解u的属性就不加以刻画了.

对于双曲型方程的定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u+f(x,y,t), \quad (x,y)\in\Omega, & (4.6)\\ u|_{\partial\Omega}=0, & (4.7)\\ u|_{t=0}=u^0(x,y), & (4.8)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u^1(x,y), & (4.9)\end{cases}$$

它的变分形式为：寻求$u(x,y,t)$使对于$\forall\varphi(x,y)\in H_0^1(\Omega)$满足下述关系式：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}(u,\varphi)+(\nabla u,\nabla\varphi)=(f,\varphi), & (4.10)\\ (u,\varphi)|_{t=0}=(u^0,\varphi), & (4.11)\\ \dfrac{d}{dt}(u,\varphi)|_{t=0}=(u^1,\varphi). & (4.12)\end{cases}$$

用变分方法对发展方程的离散化可以分两个步骤进行：首先保持时间变量t的连续性，按变分形式对空间变量进行离散化，这称之为半离散化；然后再进一步对时间变量t按差分形式离散化，这称之为全离散化.

下面介绍一些半离散化的近似方法.

4.2 半离散化方法

一、Galerkin方法

在$H_0^1(\Omega)$中选取一个有限维子空间S_N

$$S_N=\text{span}\{\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y),\cdots,\varphi_N(x,y)\}, \tag{4.13}$$

其中$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N$是$N$个线性无关，且满足边界条件$\varphi_i|_{\partial\Omega}=0$ $(i=1,2,\cdots,N)$的基函数.在S_N中寻求变分形式(4.4)、(4.5)的近似解u_N，

$$u_N(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N}u_i(t)\varphi_i(x,y). \tag{4.14}$$

代入(4.4)，(4.5)，且取$\varphi=\varphi_j$ $(j=1,2,\cdots,N)$.于是得

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{du_i(t)}{dt}(\varphi_i(x,y),\varphi_j(x,y))+\sum_{i=1}^{N}u_i(t)(\nabla\varphi_i(x,y),\nabla\varphi_j(x,y))\\ \quad=(f(x,y,t),\varphi_j(x,y)), & (4.15)\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N}u_i(0)(\varphi_i(x,y),\varphi_j(x,y))=(u^0(x,y),\varphi_j(x,y)) & (4.16)\\ \qquad\qquad(j=1,2,\cdots,N).\end{cases}$$

记

$$M=\begin{bmatrix}(\varphi_1,\varphi_1)\cdots(\varphi_1,\varphi_N)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (\varphi_N,\varphi_1)\cdots(\varphi_N,\varphi_N)\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}(\nabla\varphi_1,\nabla\varphi_1)\cdots(\nabla\varphi_1,\nabla\varphi_N)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (\nabla\varphi_N,\nabla\varphi_1)\cdots(\nabla\varphi_N,\nabla\varphi_N)\end{bmatrix},$$

$$u(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \vdots\\ u_N(t)\end{pmatrix},\quad F(t)=\begin{pmatrix}(f,\varphi_1)\\ (f,\varphi_2)\\ \vdots\\ (f,\varphi_N)\end{pmatrix},\quad u^0=\begin{pmatrix}(u^0,\varphi_1)\\ (u^0,\varphi_2)\\ \vdots\\ (u^0,\varphi_N)\end{pmatrix},\tag{4.17}$$

这里M通常称为质量矩阵,K称为刚度矩阵.于是(4.15),(4.16)可简记为

(Ⅰ)
$$\begin{cases}M\dfrac{du}{dt}+Ku=F, & (4.18)\\ Mu(0)=u^0. & (4.19)\end{cases}$$

这是一阶常微分方程组的初值问题.

同样地,对变分形式(4.10)—(4.12)我们也可将其化为求解下述二阶常微分方程组的初值问题

(Ⅱ)
$$\begin{cases}M\dfrac{d^2u}{dt^2}+Ku=F, & (4.20)\\ Mu(0)=u^0, & (4.21)\\ Mu'(0)=u^1, & (4.22)\end{cases}$$

其中记号M、K、u、F、u^0的意义同(4.17),而

$$u^1=\begin{pmatrix}(u^1,\varphi_1)\\ (u^1,\varphi_2)\\ \vdots\\ (u^1,\varphi_N)\end{pmatrix}.\tag{4.23}$$

对于常微分方程组初值问题(Ⅰ)和(Ⅱ)可用Fourier方法求解(见§4.3).

二、有限元方法

在Galerkin解法中,若改取有限维子空间S_N为由有限元基函数所张成,即

$$S_N = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N\},$$

其中$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N$为有限元基函数，这个解法称为有限元方法.

4.3 Fourier 方法

现在对常微分方程组初值问题(Ⅰ)和(Ⅱ)用Fourier方法求解.

首先考虑问题(Ⅰ)的齐次方程问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{0}, & (4.24)\\ \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}^0. & (4.25)\end{cases}$$

求变量分离的非零解

$$\boldsymbol{u}(t)=T(t)\boldsymbol{\delta}, \tag{4.26}$$

其中$\boldsymbol{\delta}=(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N)^T$是常数向量.代入(4.24).得

$$\boldsymbol{M}T'(t)\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{K}T(t)\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{0},$$

改写成

$$\frac{T'(t)}{T(t)}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\delta}=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta}. \tag{4.27}$$

由于上式右端与t无关，因此$\dfrac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda$(常数).于是由(4.27)，得

$$(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{0}. \tag{4.28}$$

为使有非零解$\boldsymbol{\delta}$，必须

$$\det|\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M}|=0.$$

它有N个解：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$，$\lambda_n$ $(n=1, \cdots, N)$称为特征值.

引理 3 特征值问题(4.28)的所有特征值均大于零，即$\lambda_n>0$ $(n=1, 2, \cdots, N)$，且对于不同的特征值λ所对应的特征向量$\boldsymbol{\delta}$在区域$\boldsymbol{\Omega}$上带权$\boldsymbol{M}$广义正交，即

$$(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\delta}_i, \boldsymbol{\delta}_j)=0, \quad \lambda_i\neq\lambda_j. \tag{4.29}$$

由于$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{M}$均为对称、正定矩阵，由(4.28)容易推得所有特征值$\lambda_n>0$，详细推导从略.

如果同一特征值λ对应有两个特征向量$\boldsymbol{\delta}_1$和$\boldsymbol{\delta}_2$，那么

$c_1\boldsymbol{\delta}_1+c_2\boldsymbol{\delta}_2$仍是对应于$\lambda$的特征向量，其中$c_1$、$c_2$为任意常数.因此我们可以应用正交化技巧，因此无妨假设，如果同一特征值对应有两个以上线性无关特征向量时，我们可以认为它们彼此间是广义正交的.设$\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_N\}$是特征值问题(4.28)的广义正交特征向量系.

相应于$\lambda=\lambda_n$，由$\dfrac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda$得

$$T_n'(t)+\lambda_n T_n(t)=0.$$

解得

$$T_n(t)=c_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t},$$

于是得到N个特解

$$\boldsymbol{u}_n(t)=T_n(t)\boldsymbol{\delta}_n=c_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\boldsymbol{\delta}_n,\quad n=1,2,\cdots,N.$$

利用叠加原理，得

$$\boldsymbol{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{u}_n(t)=\sum_{n=1}^{N}c_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\boldsymbol{\delta}_n, \tag{4.30}$$

其中常数c_n可由初始条件(4.25)，即

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{M}\sum_{n=1}^{N}c_n\boldsymbol{\delta}_n=\boldsymbol{u}^0$$

定出为

$$c_n=(\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{\delta}_n)/(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\delta}_n,\boldsymbol{\delta}_n).$$

因此，解(4.30)可表示为

$$\boldsymbol{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{\delta}_n)}{(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\delta}_n,\boldsymbol{\delta}_n)}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\boldsymbol{\delta}_n. \tag{4.31}$$

现考虑问题(Ⅰ)的非齐次问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{F}(t), & (4.18)\\ \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}^0. & (4.19)\end{cases}$$

令$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}_{(1)}(t)+\boldsymbol{u}_{(2)}(t)$，其中$\boldsymbol{u}_{(1)}(t)$是齐次方程非零初值问题(4.24)、(4.25)的解，$\boldsymbol{u}_{(2)}(t)$是非齐次方程零初值问题的解，即它满足

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{M}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_{(2)}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{(2)}(t)=\boldsymbol{F}(t), & (4.32)\\
\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_{(2)}(0)=\boldsymbol{0}. & (4.33)
\end{cases}
$$

令

$$
\boldsymbol{u}_{(2)}(t)=\sum_{n=1}^{N}T_n^*(t)\,\boldsymbol{\delta}_n, \tag{4.34}
$$

代入(4.32),得$T_n^*(t)$应满足的关系式

$$
\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_n^*(t)\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\delta}_n+\sum_{n=1}^{N}T_n^*(t)\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\delta}_n=\boldsymbol{F}(t).
$$

由(4.28)知,$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\delta}_n=\lambda_n\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\delta}_n$,因此有

$$
\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_n^*(t)+\lambda_n T_n^*(t)\right]\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\delta}_n=\boldsymbol{F}(t).
$$

两边点乘$\boldsymbol{\delta}_n$,并利用$\{\boldsymbol{\delta}_n\}(n=1,2,\cdots,N)$的广义正交性,得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_n^*(t)+\lambda_n T_n^*(t)=\frac{(\boldsymbol{F},\boldsymbol{\delta}_n)}{(\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\delta}_n,\boldsymbol{\delta}_n)},
$$

解之,并考虑到零初值(4.33),得

$$
T_n^*(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_n(\tau-t)}\frac{(\boldsymbol{F}(\tau),\boldsymbol{\delta}_n)}{(\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\delta}_n,\boldsymbol{\delta}_n)}\mathrm{d}\tau.
$$

代入(4.34),于是有

$$
\boldsymbol{u}_{(2)}(t)=\sum_{n=1}^{N}\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_n(\tau-t)}\frac{(\boldsymbol{F}(\tau),\boldsymbol{\delta}_n)}{(\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\delta}_n,\boldsymbol{\delta}_n)}\mathrm{d}\tau\cdot\boldsymbol{\delta}_n. \tag{4.35}
$$

如果我们假定$\{\boldsymbol{\delta}_n\}$是标准正交系,即

$$
(\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\delta}_n,\boldsymbol{\delta}_k)=\begin{cases}1, & 当 n=k;\\ 0, & 当 n\neq k.\end{cases}
$$

则问题(Ⅰ)的非齐次问题(4.18)、(4.19)的解可表示为

$$
\boldsymbol{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{\delta}_n)\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\boldsymbol{\delta}_n+\sum_{n=1}^{N}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)}(\boldsymbol{F}(\tau),\boldsymbol{\delta}_n)\mathrm{d}\tau\cdot\boldsymbol{\delta}_n. \tag{4.36}
$$

其次,考虑问题(Ⅱ)((4.20)—(4.22))的解.这时对应于

$\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda$的应是$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda$. 这样，问题(Ⅱ)的齐次方程非零初值问题的解为

$$u_{(1)}(t)=\sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,t+\beta_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right)\boldsymbol{\delta}_n, \tag{4.37}$$

其中

$$\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(u^1,\ \boldsymbol{\delta}_n),\quad \beta_n=(u^0,\ \boldsymbol{\delta}_n); \tag{4.38}$$

而问题(Ⅱ)的非齐次方程零初值问题的解，则为

$$u_{(2)}(t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\boldsymbol{\delta}_n}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t(\boldsymbol{F}(\tau),\ \boldsymbol{\delta}_n)\sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.39}$$

由(4.37)和(4.39)，我们就得问题(Ⅱ)((4.20)—(4.22))的解

$$u(t)=u_{(1)}(t)+u_{(2)}(t).$$

4.4 有限元解(Galerkin解)的误差估计

引理 4 设$\overline{u}_N$是变分形式广义解u在有限维空间S_N上按$H_0^1(\Omega)$的内积的Ritz投影，即

$$(\nabla(u-\overline{u}_N),\nabla\psi)=0,\qquad \forall\,\psi\in S_N, \tag{4.40}$$

Πu是u的插值函数，则有

$$\|\nabla(u-\overline{u}_N)\|_{L_2}\leqslant ch\|u\|_2. \tag{4.41}$$

这里c是与h无关的常数，h是区域剖分单元棱(边)的最大长度.

证明 由Ritz投影的定义，知

$$\|\nabla(u-\overline{u}_N)\|_{L_2}\leqslant\|\nabla(u-\Pi u)\|_{L_2}. \tag{4.42}$$

再由§3的3.3，有

$$\|\nabla(u-\Pi u)\|_{L_2}\leqslant ch\|u\|_2. \tag{4.43}$$

由(4.42)、(4.43)即得(4.41).

为了估计函数$u-\overline{u}_N$本身的L_2模，我们引入Nitsche技巧.

定理 15 (L_2模估计)设Ω是凸多角形，则

$$\|u-\overline{u}_N\|_{L_2}\leqslant ch^2\|u\|_2. \tag{4.44}$$

证明　考虑定解问题

$$\begin{cases}-\Delta w=e,\\ \quad w|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

其中$e=u-\overline{u}_N$.设w是上述问题的广义解，即

$$(\nabla w,\nabla v)=(e,v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

由于Ω是多角形区域，利用广义解的可微性(见§2，2.5)知，当$e\in L_2(\Omega)$时，$w\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，且

$$\|w\|_2\leqslant c\|e\|_{L_2},\tag{4.45}$$

从而

$$\begin{aligned}\|e\|_{L_2}^2&=(e,e)=(\nabla w,\nabla e)\\&=(\nabla(w-\Pi w),\nabla e)+(\nabla\Pi w,\nabla e)\\&\leqslant ch\|w\|_2\cdot\|\nabla e\|_{L_2}\\&\leqslant ch^2\|w\|_2\cdot\|u\|_2 &&(\text{由}(4.41))\\&\leqslant ch^2\|e\|_{L_2}\|u\|_2, &&(\text{由}(4.45))\end{aligned}$$

即有

$$\|e\|_{L_2}\leqslant ch^2\|u\|_2.\tag{4.44}$$

综合(4.41)，(4.44)可得

$$h\|\nabla(u-\overline{u}_N)\|_{L_2}+\|u-\overline{u}_N\|_{L_2}\leqslant ch^2\|u\|_2.\tag{4.45}$$

定理 16　设u_N为热传导方程的有限元解，$\overline{u}_N$是广义解u在S_N上的Ritz投影.则

$$\|u_N-\overline{u}_N\|_{L_2}\leqslant ch^2\Big[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_2+\int_0^T\|u_t\|_2\mathrm{d}t\Big].\tag{4.46}$$

证明　$\because\quad u-u_N=(u-\overline{u}_N)+(\overline{u}_N-u_N)$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad\|u-u_N\|_{L_2}&\leqslant\|u-\overline{u}_N\|_{L_2}+\|\overline{u}_N-u_N\|_{L_2}\\&\leqslant ch^2\|u\|_2+\|\overline{u}_N-u_N\|_{L_2}.\end{aligned}$$

令$\theta_N=u_N-\overline{u}_N$.由于$u_N$是下述方程的解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_N,\psi)+(\nabla u_N,\nabla\psi)=(f,\psi),\qquad\forall\psi\in S_N,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((u_N-\overline{u}_N),\psi)+(\nabla(u_N-\overline{u}_N),\nabla\psi)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_N,\psi)+(\nabla u_N,\nabla\psi)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{u}_N,\psi)-(\nabla\overline{u}_N,\nabla\psi)$$
$$=(f,\psi)-((\overline{u}_N)_t,\psi)-(\nabla u,\nabla\psi)$$
$$=(u_t,\psi)-((\overline{u}_N)_t,\psi)$$
$$=(e_t,\psi).$$
取$\psi=\theta_N$，于是由上式推得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_N\|_{L_2}^2+\|\nabla\theta_N\|_{L_2}^2\leqslant\|e_t\|_{L_2}\cdot\|\theta_N\|_{L_2}.$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_N\|_{L_2}\leqslant\|e_t\|_{L_2},$$

因此

$$\|\theta_N\|_{L_2}\leqslant\|\theta_N(0)\|_{L_2}+\int_0^t\|e_t\|_{L_2}\mathrm{d}\tau. \tag{4.47}$$

由于$e_t=u_t-(u_N)_t=u_t-(\overline{u}_t)_N$，即$(\overline{u}_N)_t$是$u_t$在$S_N$上的Ritz投影，根据定理15知

$$\|e_t\|_{L_2}\leqslant ch^2\|u_t\|_2. \tag{4.48}$$

由于

$$\begin{aligned}\theta_N(0)&=u_N(0)-\overline{u}_N(0)\\&=u_N(0)-u^0(x,y)+u(x,y,0)-\overline{u}_N(0).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|\theta_N(0)\|_{L_2}&\leqslant\|u_N(0)-u^0(x,y)\|_{L_2}+\|u(x,y,0)-\overline{u}_N(0)\|_{L_2}\\&\leqslant ch^2(\|u^0\|_2+\|u\|_2).\end{aligned} \tag{4.49}$$

综合(4.47)、(4.48)、(4.49)即得(4.46)

4.5 全离散化方法

现在我们对时间变量t按差分形式进行离散，即所谓的全离散

化. 设时间步长为Δt, $t_i=i\Delta t$. 在$t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}$上对$u_j(t)$线性插值, 即令

$$u_j(t)=(1-\theta)u_j(t_i)+\theta u_j(t_{i+1}),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

且以差商

$$\frac{1}{\Delta t}[u_j(t_{i+1})-u_j(t_i)]$$

近似微商$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_j(t)$(或记以$\dot{u}_j(t)$), 得到以$u_j(t)$为分量的向量$\boldsymbol{u}(t)$的$\theta$—差商公式

$$\theta\dot{\boldsymbol{u}}(t_{i+1})+(1-\theta)\dot{\boldsymbol{u}}(t_i)=\frac{1}{\Delta t}\{\boldsymbol{u}(t_{i+1})-\boldsymbol{u}(t_i)\},\tag{4.50}$$

其中$0\leqslant\theta\leqslant 1$. 当$\theta=0$时是显式格式; 当$\theta=1$时则是隐式格式; 当$\theta=\frac{1}{2}$时, 得到的称为Crank – Nicholson格式.

同样地, 我们也对向量$\boldsymbol{F}(t)$进行线性插值:

$$\boldsymbol{F}(t)=(1-\theta)\boldsymbol{F}(t_i)+\theta\boldsymbol{F}(t_{i+1}),\tag{4.51}$$

这样, 问题(Ⅰ)中的方程(4.18)可化为

$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\theta\Delta t)\boldsymbol{u}(t_{i+1})=[\boldsymbol{M}-\boldsymbol{K}(1-\theta)\Delta t]\boldsymbol{u}(t_i)+\Delta t[\theta\boldsymbol{F}(t_{i+1})+(1-\theta)\boldsymbol{F}(t_i)].\tag{4.52}$$

记

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{M}+\theta\Delta t\boldsymbol{K},\ \widetilde{\boldsymbol{M}}^*=\boldsymbol{M}-(1-\theta)\Delta t\boldsymbol{K},$$
$$\widetilde{\boldsymbol{F}}=\Delta t[\theta\boldsymbol{F}(t_{i+1})+(1-\theta)\boldsymbol{F}(t_i)],\tag{4.53}$$

则(4.52)式可写成

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{u}(t_{i+1})=\widetilde{\boldsymbol{M}}^*\boldsymbol{u}(t_i)+\widetilde{\boldsymbol{F}},\tag{4.54}$$

这样从$\boldsymbol{u}(0)$开始, 可以逐层求出$\boldsymbol{u}(t)$的值.

4.6 稳定性分析

在利用差分格式进行计算时, 我们是按时间t逐层推进的. 初值的误差(这是因为定解条件的数据都是实测所得而产生的)以及在

计算时的舍入误差必然会影响到后一层的解的值.因此,就有必要分析这种误差传播的情况,希望误差的影响不至于越来越大,而使解的面目全非.这便是所谓的稳定性分析.

为分析方便起见,不考虑在计算过程中存在的舍入误差.假定初值有误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$,我们要研究它的发展.

令$\boldsymbol{u}(t_i)$为精确解,$\boldsymbol{u}^*(t_i)=\boldsymbol{u}(t_i)+\boldsymbol{\varepsilon}_i$为误差影响解.于是,由式(4.54)可推得

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}=\widetilde{\boldsymbol{M}}^*\boldsymbol{\varepsilon}_i. \tag{4.55}$$

因为任意一个误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 可以表成特征向量 $\boldsymbol{\delta}_n$ 的线性组合,因此我们无妨令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}=\alpha_{i+1}\boldsymbol{\delta}_n,\ \boldsymbol{\varepsilon}_i=\alpha_i\boldsymbol{\delta}_n. \tag{4.56}$$

利用特征方程$(\boldsymbol{K}-\lambda_n\boldsymbol{M})\boldsymbol{\delta}_n=\boldsymbol{0}$,可得

$$\boldsymbol{M}(1+\theta\Delta t\lambda_n)\alpha_{i+1}\boldsymbol{\delta}_n=\boldsymbol{M}[1-(1-\theta)\Delta t\lambda_n]\alpha_i\boldsymbol{\delta}_n.$$

由此导出

$$(1+\theta\Delta t\lambda_n)\alpha_{i+1}=[1-(1-\theta)\Delta t\lambda_n]\alpha_i.$$

于是

$$\alpha_{i+1}=\frac{1-(1-\theta)\Delta t\lambda_n}{1+\theta\Delta t\lambda_n}\alpha_i$$

$$=\left[\frac{1-(1-\theta)\Delta t\lambda_n}{1+\theta\Delta t\lambda_n}\right]^{i+1}\alpha_0=\xi^{i+1}\alpha_0. \tag{4.57}$$

显然,当$|\xi|\leqslant 1$时格式是稳定的;当$|\xi|>1$时格式是不稳定的.

当$\theta=0$,即显式格式的情形,为了使$|\xi|<1$,即为保证初始误差随着时间的推移不断衰减,就要求有

$$1-\Delta t\lambda_n>-1.$$

即要求

$$\Delta t<\frac{2}{\lambda_n}\quad(n=1,2,\cdots,N).$$

由于$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，就要求

$$\Delta t<\frac{2}{\lambda_N}. \tag{4.58}$$

可见，为了要使显式格式稳定，就需要$\Delta t\ll 1$.即要求时间步长很小.

再看$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$的情形，这时

$$\xi=\frac{1-(1-\theta)\Delta t\lambda_n}{1+\theta\Delta t\lambda_n}=1-\frac{\Delta t\lambda_n}{1+\theta\Delta t\lambda_n},$$

因为ξ是θ的递增函数，于是

$$1-\frac{\Delta t\lambda_n}{1+\frac{1}{2}\Delta t\lambda_n}\leqslant\xi\leqslant 1-\frac{\Delta t\lambda_n}{1+\Delta t\lambda_n}.$$

由此，得

$$-1<\xi<1. \tag{4.59}$$

即对于任意$\Delta t>0$，总有$|\xi|<1$.因此，隐式格式和Crank－Nicholson格式是无条件稳定的.

第三章　分离变量法

分离变量法是求解偏微分方程定解问题的一个重要方法.它的本质特征是把偏微分方程的定解问题通过变量分离转化为一个特征值问题,并把它的解表示成按特征函数展开的级数形式.

分离变量法又称Fourier方法.本章中我们就分离变量法的理论基础:常微分方程特征值问题(也称Sturm－Liouville问题)的理论作一些讨论,并列举应用这些理论的几个实例.

§1　方法概述

在第二章§4中,我们已经讨论过常微分方程组的初值问题

$$
(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \boldsymbol{M}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}, \\ \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}^0 \end{cases} \tag{1.1}
$$

和

$$
(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \boldsymbol{M}\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}, \\ \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}^0, \\ \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}'(0)=\boldsymbol{u}^1. \end{cases} \tag{1.2}
$$

其中$\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{F}(t)$、$\boldsymbol{u}^0$、$\boldsymbol{u}^1$都是N维向量,$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$是N阶常系数实对称矩阵.并用Fourier方法求得了它们的解的表达式,分别为

$$
\boldsymbol{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{\delta}_n)\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\boldsymbol{\delta}_n+\sum_{n=1}^{N}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)}(\boldsymbol{F}(\tau),\boldsymbol{\delta}_n)\mathrm{d}\tau\right]\boldsymbol{\delta}_n, \tag{1.3}
$$

和

$$
\boldsymbol{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{\delta}_n)\sin\sqrt{\lambda_n}\,t+(\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{\delta}_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right]\boldsymbol{\delta}_n
$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\,\boldsymbol{\delta}_n\int_0^t(\boldsymbol{F}(\tau),\boldsymbol{\delta}_n)\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.4}$$

其中λ_n，$\boldsymbol{\delta}_n(n=1,2,\cdots,N)$就是线性代数中的特征值问题

$$(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})\boldsymbol{\delta}=0 \tag{1.5}$$

的特征值与相应的特征向量.

现在我们来考虑发展型(带时间t)偏微分方程的混合问题.以二维热传导方程混合问题为例:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=0, & (x,y)\in\Omega,\ t>0, \quad (1.6)\\ u(x,y,t)=0, & (x,y)\in\partial\Omega,\ t\geqslant 0, \quad (1.7)\\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\overline{\Omega}. \quad (1.8)\end{cases}$$

令

$$u(x,y,t)=T(t)W(x,y). \tag{1.9}$$

代入方程(1.6)和边界条件(1.7),可得到带参数λ的常微分方程

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \tag{1.10}$$

和边值问题

$$\begin{cases}\Delta W(x,y)+\lambda W(x,y)=0, & (x,y)\in\Omega, \quad (1.11)\\ W(x,y)=0, & (x,y)\in\partial\Omega. \quad (1.12)\end{cases}$$

我们把这种含待定参数λ的微分方程的边值问题也称为特征值问题，使特征值问题有非零解的λ的值称为特征值，特征值所对应的非零解称为特征函数.

特征值问题(1.11)、(1.12)与我们前面讨论过的常微分方程组初值问题所得出的特征值问题(1.5)的根本区别在于：与发展型偏微分方程混合问题相应的特征值问题，其特征值的个数不再是有限个，而是无穷多个.求得上述特征值问题(1.11)、(1.12)的全部特征值$\lambda_n(n=1,2,\cdots)$及相应的特征函数$W_n(x,y)(n=1,2,\cdots)$，然后对每一个特征值λ_n由方程(1.10)解得

$$T_n(t)=A_n\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t}. \tag{1.13}$$

从而得到适合方程(1.6)和边界条件(1.7)的变量分离形式的特解

$$u_n(x,y,t)=A_n e^{-a^2\lambda_n t} W_n(x,y).$$

令

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n t} W_n(x,y), \tag{1.14}$$

适当选取常数A_n，使上述无穷级数确定的函数$u(x,y,t)$能满足初始条件(1.8)，即要求

$$u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n(x,y)=\varphi(x,y). \tag{1.15}$$

需要指出的是：由(1.14)式给出的解的表达式，它仅是原定解问题(1.6)—(1.8)的形式解.因为要验证它确是原定解问题的解，就需要表达式中的无穷级数是一致收敛的，并对空间变量和时间变量有相应的光滑性.

从这个例子可以看出，分离变量法的理论基础在于：

1° 有关特征值问题(1.11)、(1.12)的全部特征值λ_n和相应的特征函数$W_n(x,y)$的性质；

2° 有关任意函数$\varphi(x,y)$按特征函数系$\{W_n(x,y)\}(n=1,2,\cdots)$的展开.

对于更一般情形的发展型偏微分方程相应的特征值问题，其特征值更不是一目了然的.而且一般说来，亦不易求得特征函数的具体表达式.因此，从理论上研究特征值问题的有关性质就显得极为重要.从本质上说，就是要把由线性代数给出的有限维向量空间$\mathbf{R}^n$上的实对称矩阵的特征值理论推广到无限维空间，建立关于Hilbert空间对称微分算子的特征值理论.

§2. Sturm-Liouville问题

为简单起见，我们着重讨论常微分方程的特征值问题(也称Sturm-Liouville问题)，类似的结论对于偏微分方程的特征值问题也将是适用的.

2.1 Sturm－Liouville边值问题

考虑二阶常微分方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]-\lambda s(x)y=0. \tag{2.1}$$

若定义线性微分算子

$$L=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right], \tag{2.2}$$

则方程(2.1)可写成简略形式

$$Ly-\lambda s(x)y=0. \tag{2.3}$$

我们假定在方程(2.1)中的系数$p(x)$和$s(x)$都是实函数，且满足条件

i) $p(x)\in C^1[0,l]$，$s(x)\in C[0,l]$；

ii) 在$[0,l]$上$p(x)\geqslant p_0>0$，$s(x)>0$.

考虑边界条件

$$a_1y(0)-a_2y'(0)=0, \tag{2.4}$$

$$b_1y(l)+b_2y'(l)=0, \tag{2.5}$$

其中$a_i\geqslant0$，$b_i\geqslant0$ $(i=1,2)$，且$a_1^2+a_2^2\neq0$，$b_1^2+b_2^2\neq0$.

问题(2.1)、(2.4)、(2.5)称为Sturm－Liouville边值问题.

一维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,\ t>0;\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geqslant0;\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

在用分离变量法后所得到的特征值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

就是Sturm－Liouville问题(2.1)、(2.4)、(2.5)当$p(x)=s(x)=$常数，且$a_2=b_2=0$时的特例.

当$p(0)=p(l)$，$s(0)=s(l)$时，允许给定周期边界条件

$$y(0)=y(l),\quad y'(0)=y'(l). \tag{2.6}$$

2.2 Sturm－Liouville问题的几个重要性质

在讨论Sturm－Liouville边值问题的一些性质之前，我们先导出一个恒等式，它是研究线性边值问题的基础.

设函数$u(x)$、$v(x)\in C^2[0,l]$，则对于(2.2)式定义的线性微分算子L，有恒等式

$$\int_0^l (vLu-uLv)\mathrm{d}x=-p(x)[u'(x)v(x)-u(x)v'(x)]\Big|_0^l \tag{2.7}$$

成立.式(2.7)也称为Green公式.

若函数u、v都满足边界条件(2.4)、(2.5)，且假定$a_2\neq 0$和$b_2\neq 0$，则(2.7)式右端成为

$$\begin{aligned}&-p(x)[u'(x)v(x)-u(x)v'(x)]\Big|_0^l\\&=-p(l)\left[-\frac{b_1}{b_2}u(l)v(l)+\frac{b_1}{b_2}u(l)v(l)\right]\\&\quad+p(0)\left[\frac{a_1}{a_2}u(0)v(0)-\frac{a_1}{a_2}u(0)v(0)\right]\\&=0.\end{aligned}$$

如果a_2或b_2为零，以及u和v满足周期边界条件(2.6)，容易证明也有同样的结论.此时Green公式成为

$$\int_0^l (vLu-uLv)\mathrm{d}x=0. \tag{2.8}$$

定理 1 Sturm－Liouville问题(2.1)、(2.4)、(2.5)的所有特征值都是实数.

证明 用反证法.假设存在一个复数特征值，记为$\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$，其中$\alpha$、$\beta$为实数，且$\beta\neq 0$.其相应的特征函数为$\phi(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x)$，$|\phi(x)|\neq 0$.则$\phi(x)$满足微分方程

$$L\phi-\lambda s\phi=0. \tag{2.9}$$

由于方程(2.1)和边界条件(2.4)、(2.5)都是实系数的，因此λ的共轭复数$\bar{\lambda}$亦必为特征值，相应的特征函数是$\bar{\phi}(x)$，即有

$$L\bar{\phi}-\bar{\lambda}s\bar{\phi}=0. \tag{2.10}$$

与关系式(2.8)的证明相仿，容易得到

$$\int_0^l(\bar{\phi}L\phi-\phi L\bar{\phi})\mathrm{d}x=0.$$

由式(2.9)和(2.10)，即有

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int_0^l s(x)\phi(x)\bar{\phi}(x)\mathrm{d}x=0. \tag{2.11}$$

由于$|\phi(x)|\neq0$，故上式当且仅当$\lambda=\bar{\lambda}$时成立．这与假设矛盾，所以Sturm－Liouville问题所有的特征值都是实数．

定理 2 Sturm－Liouville问题(2.1)、(2.4)、(2.5)的所有特征值都是非负的．

证明 设$y(x)$是特征值λ所对应的特征函数，则有

$$-(py')'=\lambda sy.$$

以$y(x)$乘上式两端，并在区间$[0,l]$上积分，得

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^l sy^2\mathrm{d}x&=\int_0^l[-y(py')']\mathrm{d}x\\&=-ypy'\Big|_0^l+\int_0^l py'^2\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.12}$$

由边界条件(2.4)、(2.5)可得

$$y(0)y'(0)=\frac{1}{a_1+a_2}[a_1y^2(0)+a_2y'^2(0)],$$

$$y(l)y'(l)=-\frac{1}{b_1+b_2}[b_1y^2(l)+b_2y'^2(l)],$$

故

$$-ypy'\Big|_0^l=\frac{p(l)}{b_1+b_2}[b_1y^2(l)+b_2y'^2(l)]$$

$$+\frac{p(0)}{a_1+a_2}[a_1y^2(0)+a_2y'^2(0)]. \tag{2.13}$$

由于在$[0,l]$上$p(x)>0$，故有

$$\lambda\int_0^l sy^2\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

又因在$[0,l]$上$s(x)>0$，从而应有$\lambda\geqslant 0$.

附注 若$a_1+b_1>0$，则有$\lambda>0$.

证明 由(2.12)、(2.13)式可知，当且仅当$y'(x)\equiv 0$和

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}p(0)y^2(0)+\frac{b_1}{b_1+b_2}p(l)y^2(l)=0 \tag{2.14}$$

时才有$\lambda=0$. 而此时$y(x)\equiv c$(常数). 若$a_1+b_1>0$，即a_1、b_1中至少有一个不为零，由式(2.14)应有$c=0$，即$y(x)=0$. 故$\lambda=0$不是特征值，所以$\lambda>0$.

定理 3 Sturm－Liouville问题(2.1)、(2.4)、(2.5)不同的特征值所对应的特征函数在区间$[0,l]$上带权$s(x)$互相正交.即当$\lambda_j\neq\lambda_k$时，相应的特征函数$y_j(x)$和$y_k(x)$有关系式

$$\int_0^l s(x)y_j(x)y_k(x)\mathrm{d}x=0 \qquad (j\neq k). \tag{2.15}$$

证明 设函数$y_j(x)$和$y_k(x)$分别是相应于特征值λ_j和λ_k $(j\neq k)$的特征函数.则它们分别满足方程

$$Ly_j(x)-\lambda_j s(x)y_j(x)=0$$

和

$$Ly_k(x)-\lambda_k s(x)y_k(x)=0.$$

利用Green公式(2.8)，并取$u=y_j(x)$和$v=y_k(x)$，得

$$(\lambda_j-\lambda_k)\int_0^l s(x)y_j(x)y_k(x)\mathrm{d}x=0.$$

当$\lambda_j\neq\lambda_k$时，必有

$$\int_0^l s(x)y_j(x)y_k(x)\mathrm{d}x=0 \qquad (j\neq k).$$

2.3 Sturm－Liouville问题的变分形式

Sturm－Liouville问题除了前面阐述的几个重要性质外，另外还有几个重要的性质，但证明较为繁复. 为了叙述和证明能简洁一些，本节的讨论只限于特定边界条件，即考虑下述特征值问题：

$$\begin{cases} -[p(x)y'(x)]'-\lambda s(x)y(x)=0, \quad 0<x<l, & (2.1) \\ y(0)=0, & (2.16) \\ y'(l)+ay(l)=0, & (2.17) \end{cases}$$

其中$a\geqslant 0$.至于其它边界条件的情形，特别是第一类边界条件

$$y(0)=y(l)=0,$$

以及第二类边界条件

$$y'(0)=y'(l)=0$$

的情形，可以完全类似地推得相应的性质.

在证明的过程中，我们把特征值问题的求解利用变分原理转化为解相应二次泛函的极小值问题. 为此还将引进一些必要的概念.

一、Rayleigh 商

设$y(x)\neq 0$是特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)的解，在方程(2.1)两边乘$y(x)$，并在区间$[0,l]$上积分，利用分部积分，得

$$\int_0^l p(x)y'^2(x)\mathrm{d}x-p(x)y'(x)y(x)\Big|_0^l-\lambda\int_0^l s(x)y^2(x)\mathrm{d}x=0.$$

根据边界条件(2.16)、(2.17)，得

$$\int_0^l p(x)y'^2(x)\mathrm{d}x+ap(l)y^2(l)=\lambda\int_0^l s(x)y^2(x)\mathrm{d}x,$$

即有

$$\lambda=\frac{\int_0^l p(x)y'^2(x)\mathrm{d}x+ap(l)y^2(l)}{\int_0^l s(x)y^2(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.18}$$

定义 1 记 $D(y)=\int_0^l p(x)y'^2(x)\mathrm{d}x+ap(l)y^2(l)$, $H(y)=\int_0^l s(x)y^2(x)\mathrm{d}x$. 则称泛函

$$J[y]=\frac{D(y)}{H(y)} \tag{2.19}$$

为Rayleigh商.

表达式(2.18)表明：每一个特征值λ恰好等于相应特征函数$y(x)$的Rayleigh商的值. 设λ_1是特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)的最小特征值，那末，粗略地说它相应的特征函数$y_1(x)$使得Rayleigh商$J[y]$取极小. 为了确切地描述这个泛函的极值问题，定义函数集合

$$M=\{y(x) \mid y(x)\in C^1[0,l], \text{且} y(0)=0\}, \tag{2.20}$$

并记

$$C_0^1[0,l]=\{y(x) \mid y(x)\in C^1[0,l], \text{且} \operatorname{supp} u\subset(0,l)\}, \tag{2.21}$$

其中$\operatorname{supp} u$是函数$u(x)$的支集，即指在$[0,l]$内使$u(x)\neq 0$的点集的闭包.

定理 4 设$y(x)\in C^2[0,l]$是变分问题

$$J[y]=\inf_{\substack{z\in M\\ z\neq 0}} J[z] \tag{2.22}$$

的解，且$J[y]=d$，则d是特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)的最小特征值，$y(x)$是相应的特征函数.

证明 设$y(x)$是变分问题(2.22)的解，$y(x)\neq 0$，则对任意给定的$\eta(x)\in M$及任意的$\varepsilon\in\mathbf{R}$，

$$J[y(x)+\varepsilon\eta(x)]=j(\varepsilon)$$

是变量ε的函数.由假设知,当$\varepsilon=0$时这个泛函取到极值,即

$$j(0)=\min_{\varepsilon\in\mathbf{R}} j(\varepsilon).$$

根据微分学中函数极值的必要条件,应有$j'(0)=0$.通过计算,得

$$H(y)D(y,\eta)-D(y)H(y,\eta)=0, \tag{2.23}$$

其中

$$\begin{aligned} D(y,\eta)&=\int_0^l p(x)y'(x)\eta'(x)\mathrm{d}x+ap(l)y(l)\eta(l),\\ H(y,\eta)&=\int_0^l s(x)y(x)\eta(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.24}$$

由于$y(x)$是变分问题(2.22)的解,且$J[y]=d$,即

$$D(y)=d\cdot H(y),$$

故由式(2.23)可推得

$$D(y,\eta)-d\cdot H(y,\eta)=0, \qquad \forall\eta(x)\in M, \tag{2.25}$$

即

$$\int_0^l p(x)y'(x)\eta'(x)\mathrm{d}x-d\cdot\int_0^l s(x)y(x)\eta(x)\mathrm{d}x+ap(l)y(l)\eta(l)=0.$$

利用分部积分,并考虑到$\eta(0)=0$,得

$$\int_0^l[-(py')'-d\cdot sy]\eta\mathrm{d}x+p(l)\eta(l)[y'(l)+ay(l)]=0. \tag{2.26}$$

由于$C_0^1[0,l]$是M的子集,故有

$$\int_0^l[-(py')'-d\cdot sy]\eta\mathrm{d}x=0, \qquad \forall\eta(x)\in C_0^1[0,l].$$

根据变分法基本引理(见第二章§2.引理1),即得

$$-(py')'-dsy=0.$$

将它代入(2.26)式，得

$$p(l)\eta(l)[y'(l)+ay(l)]=0,\ \forall \eta(x)\in M.$$

由于$p(l)\neq 0$及$\eta(l)$的任意性，应有

$$y'(l)+ay(l)=0.$$

综上所述，$y(x)$是特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)的解，即d是特征值，而$y(x)$是相应的特征函数。由于d是泛函$J[z]$的极小值，故d就是最小特征值(记为λ_1)，而$y(x)$是相应于最小特征值的特征函数.

附注 需要特别指出的是在变分问题(2.22)中，边界条件(2.16)和(2.17)的处理方法是不同的. 在$x=0$处给的是第一类边界条件，它在变分问题(2.22)中是作为约束条件强制加在函数集合M的定义中的，而在$x=l$处给的是第三类边界条件，并不需要加在函数集合M的定义中，它在变分问题中是作为自然边界条件，由泛函$J[y]$取到极值的函数所应该自然满足的.

为了求第二个特征值λ_2和相应的特征函数$y_2(x)$，我们首先要注意到:

1° λ_2是除λ_1以外的最小特征值;

2° $y_2(x)$与$y_1(x)$必须广义正交(即带权$s(x)$正交). 因此，在函数集M中取一个子空间

$$M_1=\{y(x)\mid y(x)\in M,\ 且H(y,y_1)=0\},\tag{2.27}$$

在M_1上寻求泛函$J[y]$的极小值. 由于它已排除了特征函数$y_1(x)$取极值的可能，故应有

$$J[y_2]=\inf_{\substack{y\in M\\ y\neq 0}} J[y]=\lambda_2.\tag{2.28}$$

一般说来，若我们已经依次找出了特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)的前n个特征值$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，以及相应的特征函数$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$，那么为了求第$n+1$个特征值$\lambda_{n+1}$，以及相应

的特征函数$y_{n+1}(x)$，有如下定理:

定理 5 设$y_{n+1}(x)$是变分问题

$$J[y]=\inf_{\substack{z\in M_n\\ z\neq 0}} J[z]. \tag{2.29}$$

的解，且$J[y_{n+1}]=d_{n+1}$，其中函数集M_n为:

$$M_n=\{y(x)\mid y(x)\in M,\ 且H(y,y_i)=0,\ \ i=1,2,\cdots,n\}, \tag{2.30}$$

则d_{n+1}是特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)的第$n+1$个特征值λ_{n+1}，而$y_{n+1}(x)$是相应的特征函数.

证明 设$y_{n+1}(x)\in M_n$，$y_{n+1}(x)\neq 0$是变分问题(2.29)的解.与定理4的证明相仿，可得到

$$D(y_{n+1},\eta)-d_{n+1}\cdot H(y_{n+1},\eta)=0,\ \forall\eta(x)\in M_n. \tag{2.31}$$

但为了证明d_{n+1}确是特征值，而$y_{n+1}(x)$是相应的特征函数，必须要证明等式(2.31)对任意的$\zeta(x)\in M$成立，即要证明

$$D(y_{n+1},\zeta)-d_{n+1}\cdot H(y_{n+1},\zeta)=0,\ \forall\zeta(x)\in M \tag{2.32}$$

成立.为此对任意函数$\zeta(x)\in M$进行正交分解

$$\zeta(x)=\zeta_n(x)+\eta_n(x),$$

其中$\zeta_n(x)\in S_n=\mathrm{span}\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，即$S_n$是由前$n$个特征函数$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$所生成的$n$维空间，而$\eta_n(x)\in M_n$. 则$\zeta_n(x)$可表示成

$$\zeta_n(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i.$$

上式两边乘以$s(x)y_i(x)$，并在$[0,l]$上积分，注意到$y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$彼此间带权$s(x)$正交，可推得

$$c_i H(y_i,y_i)=H(\zeta_n,y_i)\qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

又因$\eta_n(x)\in M_n$，有$H(\zeta,y_i)-H(\zeta_n+\eta_n,y_i)=H(\zeta_n,y_i)$,故

$$\zeta_n(x)=\sum_{i=1}^{n}H(\zeta,y_i)y_i\ .$$

于是

$$\eta_n(x)=\zeta(x)-\sum_{i=1}^{n}H(\zeta,y_i)y_i\ .$$

由于式(2.31)对所有的$\eta(x)\in M_n$都成立,故亦有

$$D(y_{n+1},\zeta-\zeta_n)-d_{n+1}\cdot H(y_{n+1},\zeta-\zeta_n)=0$$

成立.即

$$D(y_{n+1},\zeta)-d_{n+1}\cdot H(y_{n+1},\zeta)+R_n=0, \qquad (2.33)$$

其中

$$R_n=-D(y_{n+1},\zeta_n)+d_{n+1}\cdot H(y_{n+1},\zeta_n). \qquad (2.34)$$

与式(2.32)相比较,我们需要证明$R_n=0$.

事实上,利用与表达式(2.25)类似的结论

$$D(y_{i+1},\eta_i)-\lambda_i H(y_{i+1},\eta_i)=0, \qquad \forall\eta_i\in M_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

以及

$$H(y_{n+1},y_i)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

可推得

$$\begin{aligned}R_n&=-\sum_{i=1}^{n}[D(y_{n+1},y_i)H(\zeta,y_i)-d_{n+1}\cdot H(y_{n+1},y_i)\cdot H(\zeta,y_i)]\\&=-\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-d_{n+1})H(y_{n+1},y_i)H(\zeta,y_i)\\&=0,\end{aligned}$$

因此(2.32)式成立.

重复与定理4相仿的推导,即可知$y_{n+1}(x)$是特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)的解,即满足

$$\begin{cases}[-p(x)y'(x)]'-d_{n+1}\cdot s(x)y(x)=0,\\ y(0)=0,\\ y'(l)+ay(l)=0.\end{cases}$$

故d_{n+1}是特征值，$y_{n+1}(x)$是与它相应的特征函数.由于

$$M_n\subset M_{n-1}\subset\cdots\subset M_1\subset M,$$

所以有

$$d_{n+1}\geqslant\lambda_n\geqslant\lambda_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_1.$$

又因d_{n+1}是$J[y]$在M_n中的极小值，所以它是紧挨着λ_n的第$n+1$个特征值，即$\lambda_{n+1}=d_{n+1}$.

定理4和定理5也称为特征值问题的变分原理.

从定理5可以看出：特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)存在一个单调非减的特征值序列

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

且与它们相应的特征函数$y_i(x)(i=1,2,\cdots)$在内积$H(y,z)$(即加权函数$s(x)$的$L_2[0,l]$空间的内积)意义下广义正交.作为一个单调非减的无穷序列$\{\lambda_n\}$，它的极限行为在后面我们还将作进一步的研究.

二、变分问题解的存在性

在定理4和定理5中，我们都是把Sturm－Liouville问题的特征值和相应特征函数的求解转化为相应变分问题的求解.上述两个定理正确的前提应要求：

1° 变分问题(2.22)以及变分问题(2.29)有解；

2° 它们的解(即能使泛函取到极值的函数)必须属于$C^2[0,l]$.

为了给上述特征值问题的变分原理奠定结实的基础，需要对集合

$$M=\{y(x)\mid y(x)\in C^1[0,l],\text{且}y(0)=0\}$$

按模

$$\|y(x)\|=\sqrt{D(y,y)}=\sqrt{\int_0^l p(x)y'^2(x)\mathrm{d}x+ap(l)y^2(l)}\quad(2.35)$$

完备化.从而与第二章一样,我们需引进Sobolev空间$H^1(0,l)$.

定义 2 引进函数集合记号

$$H^1(0,l)=\{y(x) \mid y(x)\in L_2(0,l),\ y'(x)\in L_2(0,l)\}, \qquad (2.36)$$

其中$y'(x)$是函数$y(x)$的一阶广义微商.若$y(x)$、$z(x)\in H^1(0,l)$,规定内积与模分别为

$$D(y,z)=\int_0^l p(x)y'(x)z'(x)\mathrm{d}x+\alpha p(l)y(l)z(l) \qquad (2.37)$$

和

$$\|y\|_1=\sqrt{D(y,y)}. \qquad (2.38)$$

由第二章可知,$H^1(0,l)$是一个Hilbert空间.根据Sobolev嵌入定理,我们有

定理 6 空间$H^1(0,l)$与$C[0,l]$间有下述关系:

1° $H^1(0,l)\subset C[0,l]$.

2° 从$H^1(0,l)$到$C[0,l]$的嵌入算子是有界算子,即存在常数K,使得

$$\|y(x)\|_C\leqslant K\|y(x)\|_1. \qquad (2.39)$$

3° 从$H^1(0,l)$到$C[0,l]$的嵌入算子是紧算子,即任意属于$H^1(0,l)$的有界集$\{y_n\}$,必存在$C[0,l]$中的子序列$\{y_{n_k}\}\subset\{y_n\}$,使得$\{y_{n_k}\}$是$C[0,l]$中的基本列.即存在$y\in C[0,l]$,使

$$\|y_{n_k}-y\|_C\to 0 \qquad (\text{当}n\to\infty). \qquad (2.40)$$

上述定理可由第二章§1中叙述的Sobolev空间嵌入定理直接导出.但由于这里是一维情形,我们不妨给出一个简要的证明,以弥补当时对嵌入定理述而不证的缺憾.

证明 对任意的$y(x)\in M$,我们有

$$y(x)=\int_0^x y'(x)\mathrm{d}x.$$

利用Schwarz不等式,得

$$|y(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{p_{\min}}} \left| \int_0^x \sqrt{p(x)} y' \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{p_{\min}}} \sqrt{\int_0^l py'^2 \mathrm{d}x},$$

其中$p_{\min} = \min\limits_{x \in [0,l]} p(x)$.故有

$$\|y(x)\|_C = \max_{x \in [0,l]} |y(x)|$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{l}{p_{\min}}} \sqrt{\int_0^l py'^2 \mathrm{d}x} \leqslant K \|y(x)\|_1. \tag{2.39}$$

而$\forall x_1, x_2 \in [0,l]$,则有

$$|y(x_1) - y(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} y'(x) \mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{p_{\min}}} \left| \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{p(x)} y'(x) \mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{p_{\min}}} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} py'^2 \mathrm{d}x} \cdot |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{p_{\min}}} \|y\|_1 \cdot |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}}. \tag{2.41}$$

不等式(2.39)、(2.41)表明函数空间$C[0,l]$是一致有界且等度连续的.根据Arzela－Ascoli定理,即知$C[0,l]$是列紧的.于是对任意属于$H^1(0,l)$的有界集$\{y_n\}$,必存在$C[0,l]$中的子序列$\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$,使得$\{y_{n_k}\}$是$C[0,l]$中的基本列.即存在$y(x) \in C[0,l]$,使得

$$\|y_{n_k} - y\|_C \to 0 \qquad (当 n \to \infty).$$

为了后面叙述的需要,我们引进加权的L_2空间的概念.

定义 3 加权函数$s(x)$的$L_2[0,l]$空间记作$L_2^*[0,l]$,定义为

$$L_2^*[0,l] = \left\{ y(x) \,\middle|\, \int_0^l s(x) y^2(x) \mathrm{d}x < \infty \right\}. \tag{2.42}$$

其中$s(x)\in C[0,l]$, $s(x)>0$, 并规定其内积与模分别为

$$H(y,z)=\int_0^l s(x)y(x)z(x)\mathrm{d}x \tag{2.43}$$

和

$$\|y\|_{L_2^s}=\sqrt{H(y,y)}. \tag{2.44}$$

可以验证这是一个Hilbert空间.

现在我们来证明变分问题(2.22)解的存在性.

定理 7 变分问题(2.22)必有解$y(x)\in H^1(0,l)$.

证明 由Rayleigh商的定义知,

$$J[y]=\frac{D(y)}{H(y)}$$

在集合M上有下界. 因此存在下确界d. 即存在$\{y_n\}\subset M$, 当$n\to\infty$时, 有$J[y_n]\to d$, 亦即对任给$\varepsilon>0$, $\exists N$. 当$n>N$时, 有

$$d\leqslant J[y_n]\leqslant d+\varepsilon. \tag{2.45}$$

令

$$\overline{y}_n=\frac{y_n}{\|y_n\|_{L_2^s}},$$

从而有

$$d\leqslant D(\overline{y}_n)\leqslant d+\varepsilon, \quad H(\overline{y}_n)=1. \tag{2.46}$$

因此, 当n、$m>N$时, 有

$$\begin{aligned}
&D(\overline{y}_n-\overline{y}_m)-d\cdot H(\overline{y}_n-\overline{y}_m)\\
&=H(\overline{y}_n-\overline{y}_m)\left[\frac{D(\overline{y}_n-\overline{y}_m)}{H(\overline{y}_n-\overline{y}_m)}-d\right]\\
&=H(\overline{y}_n-\overline{y}_m)(J[\overline{y}_n-\overline{y}_m]-d)\\
&\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

再利用Hilbert空间$H^1(0,l)$和$L_2^s[0,l]$中模所满足的平行四边形等式, 即

$$D(\overline{y}_n-y_m)+D(\overline{y}_n+y_m)=2D(\overline{y}_n)+2D(\overline{y}_m) \tag{2.48}$$

和

$$H(\bar{y}_n-\bar{y}_m)+H(\bar{y}_n+\bar{y}_m)=2H(\bar{y}_n)+2H(\bar{y}_m), \tag{2.49}$$

可推得

$$\begin{aligned}
&D(\bar{y}_n-\bar{y}_m)-d\cdot H(\bar{y}_n-\bar{y}_m)\\
&=-D(\bar{y}_n+\bar{y}_m)+2D(\bar{y}_n)+2D(\bar{y}_m)\\
&\quad+d\cdot H(\bar{y}_n+y_m)-2d\cdot H(\bar{y}_n)-2d\cdot H(y_m)\\
&\leqslant 4(d+\varepsilon)-4d-H(\bar{y}_n+\bar{y}_m)(J[\bar{y}_n+\bar{y}_m]-d)\\
&\leqslant 4\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

综合(2.47)、(2.50)，则有当n、$m\to\infty$时

$$D(\bar{y}_n-\bar{y}_m)-d\cdot H(\bar{y}_n-\bar{y}_m)\to 0. \tag{2.51}$$

由于$D(\bar{y}_n)$有界，因此$\{\bar{y}_n\}$是$H^1(0,l)$中的有界集.根据定理6，可以选出子序列$\{\bar{y}_{n_k}\}\subset C[0,l]$，使得当$n_k$、$m_k\to\infty$时，有

$$\|\bar{y}_{n_k}-\bar{y}_{m_k}\|_C\to 0,$$

从而也必有

$$\|\bar{y}_{n_k}-\bar{y}_{m_k}\|_{L_2^*}\to 0.$$

即

$$H(\bar{y}_{n_k}-\bar{y}_{m_k})\to 0. \tag{2.52}$$

代入式(2.51)，也就有

$$D(y_{n_k}-\bar{y}_{m_k})\to 0.$$

由空间$H^1(0,l)$的完备性，故存在$\bar{y}(x)\in H^1(0,l)$，使得

$$D(\bar{y})=d,\quad H(\bar{y})=1$$

且

$$\|\bar{y}_{n_k}-\bar{y}\|_1\to 0 \qquad (\text{当}\, n_k\to\infty). \tag{2.53}$$

因此，$\overline{y}(x)$即是变分问题(2.22)的解.

类似地，可以证明变分问题(2.29)的解的存在性.

附注 在定理7中，我们证明了在Hilbert空间$H^1(0,l)$中变分问题(2.22)必有解$y(x)$存在.但是一般来说，这个解并不一定属于$C^2[0,l]$，因而它不是特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)在古典意义上的解.我们把变分问题属于$H^1(0,l)$的解，称为特征值问题的广义解.

三、$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$的证明

定理 8 特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)所有的特征值组成一个单调非减的序列，即

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty. \tag{2.54}$$

证明 根据定理5证明过程中的构造程序，可知$\{\lambda_n\}$是单调非减序列，且因$H^1(0,l)$是无穷维空间，因而可以得到一个无穷序列

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

现用反证法来证明$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$.假设不然，即有$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\mu<+\infty$.设$\overline{y}_n(x)$是相应于特征值$\lambda_n$的规范的特征函数，则有

$$\|\overline{y}_n\|^2_{L_2^*}=H(\overline{y}_n)=1,\quad \|\overline{y}_n\|_1=\lambda_n\leqslant\mu.$$

故$\{\overline{y}_n\}$是$H^1(0,l)$中的有界集.由定理6知，存在$C[0,l]$中的子序列$\{\overline{y}_{n_k}\}$，使得当n_k、$m_k\to\infty$时，有

$$\|\overline{y}_{n_k}-\overline{y}_{m_k}\|_C\ \to\ 0.$$

从而也就有

$$\|\overline{y}_{n_k}-\overline{y}_{m_k}\|_{L_2^*}\ \to\ 0. \tag{2.55}$$

又因

$$H(\overline{y}_{n_k}-\overline{y}_{m_k})=H(\overline{y}_{n_k})+H(\overline{y}_{m_k})-2H(y_{n_k},y_{m_k}),$$

根据特征函数系的正交性，知

$$H(\overline{y}_{n_k}, \overline{y}_{m_k})=0 \qquad (n_k \neq m_k).$$

故有

$$\|\overline{y}_{n_k}-\overline{y}_{m_k}\|^2_{L_2^*}=\|\overline{y}_{n_k}\|^2_{L_2^*}+\|\overline{y}_{m_k}\|^2_{L_2^*}=2.$$

这与(2.55)式矛盾.从而证明了

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty.$$

四、特征函数系的完全性

特征值问题还有另一个重要性质,即所有特征函数组成的函数系是加权的L_2空间(即$L_2^*[0,l]$)的一组完全的正交基.为证明这个性质,我们分两步进行:先证$f(x)\in H^1(0,l)$的情形,再证$f(x)\in L_2^*[0,l]$的情形.为此先建立下述引理:

引理 1 设函数$f(x)\in H^1(0,l)$,且满足边界条件(2.16)、(2.17),则当且仅当

$$c_n=H(f,\overline{y}_n)=\int_0^l s(x)f(x)\overline{y}_n(x)\mathrm{d}x \tag{2.56}$$

时,$\|f(x)-\sum_{n=1}^{N} c_n\overline{y}_n(x)\|_{L_2^*}$取最小值.其中$\overline{y}_n(x)(n=1,2,\cdots,N)$是特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)的前N个规范的特征函数(即有$\|\overline{y}_n\|^2_{L_2^*}=H(\overline{y}_n)=1$).

证明 记

$$\delta_N=\|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n\overline{y}_n(x)\|_{L_2^*}, \quad f_n=H(f,\overline{y}_n),$$

则

$$\begin{aligned}\delta_N^2&=\|f-\sum_{n=1}^{N}c_n\overline{y}_n\|^2_{L_2^*}\\&=\int_0^l s(f-\sum_{n=1}^{N}c_n\overline{y}_n)^2\mathrm{d}x\\&=\int_0^l sf^2\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{N}(f_n-c_n)^2-\sum_{n=1}^{N}f_n^2.\end{aligned}$$

由此可见,当且仅当

$$c_n=f_n=H(f,\overline{y}_n)=\int_0^l sf\overline{y}_n\,\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,\cdots,N)$$

时，δ_N取到最小值

$$\min\|f-\sum_{n=1}^{N}c_n\bar{y}_n\|_{L_2^*}^2=\int_0^l sf^2\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{N}f_n^2.$$

引理得证.

附注 由于$\delta_N^2\geqslant 0$，及N的任意性，可导出不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\leqslant\int_0^l s(x)[f(x)]^2\mathrm{d}x. \tag{2.57}$$

上式称为Bessel不等式.

定理 9 特征值问题(2.1)、(2.16)、(2.17)的规范特征函数系$\{\bar{y}_n(x)\}$构成空间$L_2^*[0,l]$的一组完全正交基.即对任意的$f(x)\in L_2^*[0,l]$，有

$$\lim_{N\to\infty}\|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n\bar{y}_n(x)\|_{L_2^*}=0, \tag{2.58}$$

其中

$$c_n=H(f,\bar{y}_n)=\int_0^l sf\bar{y}_n\,\mathrm{d}x.$$

亦即$f(x)$可以按特征函数系$\{y_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$展开成广义Fourier级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n y_n(x). \tag{2.59}$$

证明 1° 先证$f(x)\in H^1(0,l)$的情形.

假设$f(x)\in H^1(0,l)$，且满足边界条件(2.16)、(2.17).令

$$r_N(x)=f(x)-\sum_{n=1}^{N}H(f,\bar{y}_n)\bar{y}_n(x),$$

则当$1\leqslant k\leqslant N$时，有

$$\begin{aligned}H(r_N,\bar{y}_k)&=H(f,\bar{y}_k)-\sum_{n=1}^{N}H(f,\bar{y}_n)\cdot H(\bar{y}_n,\bar{y}_k)\\&=0.\end{aligned}$$

可见$r_N(x)\in M_N$.由定理5知

$$J[r_N(x)]=\frac{D(r_N)}{H(r_N)}\geqslant\lambda_{N+1},$$

即

$$H(r_N) \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} D(r_N). \tag{2.60}$$

现再证明$D(r_N)$一致有界.事实上

$$\begin{aligned}
D(r_N) &= D\left[f-\sum_{n=1}^{N} H(f,\bar{y}_n)\bar{y}_n\right] \\
&= D(f)+D\left[\sum_{n=1}^{N} H(f,\bar{y}_n)\bar{y}_n\right]-2\sum_{n=1}^{N} H(f,\bar{y}_n)D(f,\bar{y}_n) \\
&= D(f)+\sum_{n,m=1}^{N} H(f,\bar{y}_n)H(f,\bar{y}_m)D(\bar{y}_n,\bar{y}_m)-2\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left[H(f,\bar{y}_n)\right]^2 \\
&= D(f)+\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left[H(f,\bar{y}_n)\right]^2-2\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left[H(f,\bar{y}_n)\right]^2 \\
&\leqslant D(f).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

以上运算中,我们用到了

$$\begin{aligned}
D(\bar{y}_n,\bar{y}_m) &= \lambda_n H(\bar{y}_n,\bar{y}_m) \\
&= \lambda_n \delta_{n,m},
\end{aligned} \tag{2.62}$$

其中

$$\delta_{n,m}=\begin{cases}1, & n=m; \\ 0, & n\neq m.\end{cases} \tag{2.63}$$

(2.61)式代入(2.60)式,得

$$H(r_N)=\|r_N\|_{L_2^*}^2 \leqslant \frac{\|f\|_1^2}{\lambda_{N+1}}.$$

再由定理8,当$N\to\infty$时就有$\|r_N\|_{L_2^*}\to 0$.于是得

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} H(f,\bar{y}_n)\bar{y}_n(x).$$

在再证$f(x)\in L_2^*[0,l]$的情形时要用到下述引理的结论.

引理 2 设$f(x)\in L_2^*[0,l]$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,总可以找到一个函数$f^*(x)\in H^1(0,l)$,且$f^*(0)=0$,使得

$$\|f(x)-f^*(x)\|_{L_2^*}^2<\frac{\varepsilon}{4} \tag{2.64}$$

成立.

证明 把$f(x)$延拓到$x<0$及$x>l$,仍记为$f(x)$,即令

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ f(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ 0, & x>l.\end{cases}$$

并令

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}f_h(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)]\in L_2^*[0,l],$$

故$f_h(x)\in H^1(0,l)$. 又因

$$\begin{aligned}|f_h(x)-f(x)|&=\frac{1}{2h}\left|\int_{x-h}^{x+h}[f(\xi)-f(x)]\mathrm{d}\xi\right|\\ &\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(x+\tau)-f(x)|\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{-1}^{1}|f(x+h\tau)-f(x)|^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|f_h(x)-f(x)\|_{L_2^*}^2&=\int_0^l s(x)[f_h(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x\\ &\leqslant\frac{1}{2}\int_0^l s(x)\left(\int_{-1}^{1}|f(x+h\tau)-f(x)|^2\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^l s(x)|f(x+h\tau)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

由$L_2^*[0,l]$的等度连续性知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$|h\tau|<\delta$时有

$$\int_0^l s(x)|f(x+h\tau)-f(x)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon/4,$$

于是有

$$\|f_h(x)-f(x)\|_{L_2^*}^2<\frac{\varepsilon}{4}.$$

取$f^*(x)=f_h(x)$即有引理2的结论.

2° 现在再证定理9当$f(x)\in L_2^*[0,l]$的情形.

对于给定的$\varepsilon>0$, 利用引理2考虑函数

$$r_N^*(x)=f^*(x)-\sum_{n=1}^{N} c_n^* \overline{y}_n(x),$$

其中

$$c_n^*=H(f^*,\overline{y}_n)=\int_0^l sf^*\overline{y}_n\,\mathrm{d}x.$$

由情形1°的讨论知：存在$N_0>0$，当$N>N_0$时，有

$$\|f^*(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n^*\overline{y}_n(x)\|_{L_2^*}^2<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.65}$$

根据引理1知

$$\begin{aligned}\|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n\overline{y}_n(x)\|_{L_2^*}^2&\leqslant\|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n^*\overline{y}_n(x)\|_{L_2^*}^2\\&\leqslant\|f(x)-f^*(x)\|_{L_2^*}^2+\|f^*(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n^*\overline{y}_n(x)\|_{L_2^*}^2\\&\quad+2\left|\int_0^l s(x)[f(x)-f^*(x)][f^*(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n^*y_n(x)]\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

上述不等式右端第三项利用Schwarz不等式，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^l s(x)[f(x)-f^*(x)][f^*(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n^*y_n(x)]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\|f(x)-f^*(x)\|_{L_2^*}\cdot\|f^*(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n^*\overline{y}_n(x)\|_{L_2^*}.\end{aligned}$$

从而由引理2及式(2.65)，有

$$\|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n\overline{y}_n(x)\|_{L_2^*}^2<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+2\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{4}}=\varepsilon.$$

此即表明

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^l s(x)[f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n\overline{y}_n(x)]^2\mathrm{d}x=0.$$

定理9得证.

附注 根据特征函数系$\{\overline{y}_n(x)\}$的完全性，Bessel不等式(2.57)可以加强为等式.由定理9的式(2.58)，我们可以得到关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=\int_0^l s(x)[f(x)]^2\mathrm{d}x, \tag{2.66}$$

此式称为Parseval等式.

2.4 基本定理

总结本节前面已经论证得到的关于Sturm - Liouville问题的一些重要性质,我们有

基本定理1 在区间$[0,l]$上的Sturm—Liouville问题:

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]-\lambda s(x)y=0, \\ a_1y(0)-a_2y'(0)=0, \\ b_1y(l)+b_2y'(l)=0, \end{cases}$$

其中$a_i \geqslant 0, b_i \geqslant 0 (i=1,2)$, 且$a_1^2+a_2^2 \neq 0, b_1^2+b_2^2 \neq 0$, 其特征值和特征函数具有下述性质:

(i) 所有的特征值都是非负实数. 特别地, 当$a_1+b_1>0$时, 所有的特征值都是正数.

(ii) 所有的特征值组成一个单调非减, 并以无穷远点为凝聚点的序列,即

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

(iii) 不同的特征值λ所对应的特征函数$y(x)$在区间$[0,l]$上加权$s(x)$正交.即当$\lambda_j \neq \lambda_k$时, 相应的特征函数$y_j(x)$和$y_k(x)$有关系式

$$\int_0^l s(x)y_j(x)y_k(x)\mathrm{d}x=0 \qquad (j\neq k).$$

(iv) 所有的特征函数$y_n(x)(n=1,2,\cdots)$构成空间$L_2^*[0,l]$的一组完全正交基. 即对任意的函数$f(x)\in L_2^*[0,l]$, 可以按特征函数系$\{y_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$展成广义Fourier级数:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x),$$

其中

$$c_n = \frac{\int_0^l s(x)f(x)y_n(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l s(x)y_n^2(x)\mathrm{d}x} \qquad (n=1,2,\cdots),$$

亦即

$$\lim_{N\to\infty} \|f(x)-\sum_{n=1}^{N} c_n y_n(x)\|_{L_s^2}=0.$$

上述定理是整个分离变量法的理论基础.

§3. Sturm－Liouville问题的推广

3.1 多维Sturm－Liouville问题

在§2中我们对常微分方程的特征值问题，即一维情形的Sturm－Liouville问题，所导出的基本定理在多维情形的Sturm－Liouville问题中同样是成立的. 现在以§1中曾导出的二维Laplace算子的特征值问题为例，表述如下基本定理:

基本定理 2 在有界区域$\Omega\subset\mathbf{R}^2$上的二维Laplace算子特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta W(x,y)-\lambda W(x,y)=0 & (x,y)\in\Omega, \quad (3.1)\\ W(x,y)=0, & (x,y)\in\partial\Omega, \quad (3.2)\end{cases}$$

其特征值和特征函数具有下述性质:

(i) 所有的特征值都是正实数，即$\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots)$.

(ii) 所有的特征值组成一个单调非减，并以无穷远点为凝聚点的序列，即

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots \qquad (3.3)$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty. \qquad (3.4)$$

(iii) 不同的特征值λ所对应的特征函数$W(x,y)$在区域Ω上互

相正交.即当$\lambda_j \neq \lambda_k$时,相应的特征函数$W_j(x,y)$和$W_k(x,y)$有关系式

$$\iint_{\Omega} W_j(x,y) W_k(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0 \qquad (j \neq k). \tag{3.5}$$

(iv) 所有的特征函数$W_n(x,y)(n=1,2,\cdots)$构成空间$L_2(\Omega)$的一组完全正交基.即对任意的函数$f(x,y) \in L_2(\Omega)$,可以按特征函数系$\{W_n(x,y)\}(n=1,2,\cdots)$展成广义的Fourier级数

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n W_n(x,y), \tag{3.6}$$

其中

$$c_n = \frac{\iint_{\Omega} f(x,y) W_n(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y}{\iint_{\Omega} W_n^2(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y} \qquad (n=1,2,\cdots), \tag{3.7}$$

亦即

$$\lim_{N \to \infty} \| f(x,y) - \sum_{n=1}^{N} c_n W_n(x,y) \|_{L_2} = 0. \tag{3.8}$$

上述定理的证明与一维情形完全相仿.差别仅在于这时的Rayleigh商应定义为

$$J[W] = \frac{D(W)}{H(W)}, \tag{3.9}$$

其中

$$D(W) = (\nabla W, \nabla W) = \iint_{\Omega} |\nabla W|^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \tag{3.10}$$

$$H(W) = (W, W) = \iint_{\Omega} |W|^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{3.11}$$

为了保证变分问题解的存在性,在一维情形时的Hilbert空间$H^1(0,l)$,这时应换以$H_0^1(\Omega)$,其定义为

$$H_0^1(\Omega) = \{u(x,y) \mid u \in H^1(\Omega), \text{且} u|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{3.12}$$

而

$$H^1(\Omega)=\{u(x,y)\mid u\in L_2(\Omega),且广义微商\nabla u\in L_2(\Omega)\}. \tag{3.13}$$
在$H_0^1(\Omega)$上的内积定义为

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)}=\iint\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3.14}$$

并规定模

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\sqrt{(u,u)_{H_0^1(\Omega)}}. \tag{3.15}$$

容易验证$H_0^1(\Omega)$是一个Hilbert空间. 它是一个具有一阶平方可积广义微商的Sobolev空间(可参见本书第二章 § 1).

在二维情形时的特征值与相应特征函数的关系式(2.32)应改成
$$(\nabla W_n,\nabla\zeta)-\lambda_n(W_n,\zeta)=0,\ \forall\zeta\in H_0^1(\Omega). \tag{3.16}$$

3.2 算子方程的特征值问题

现在我们把数学物理方程的特征值问题抽象为算子方程的特征值问题
$$Au-\lambda u=0. \tag{3.17}$$
算子A的定义域$\mathscr{D}_A$为按照问题的要求足够次连续可微函数的线性集合,且满足某类齐次边界条件.

例如,特征值问题:
$$\begin{cases}-\Delta u-\lambda u=0 & (\Omega),\\ u\mid_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{3.18}$$
相应于算子$A=-\Delta$的定义域为
$$\mathscr{D}_A=\{u\mid u\in C^2(\overline{\Omega}),且u\mid_{\partial\Omega}=0\}. \tag{3.19}$$

定义 3 对任意的函数u、$v\in\mathscr{D}_A$,如果关系式
$$(Au,v)=(u,Av) \tag{3.20}$$
成立,其中$\mathscr{D}_A$为算子A的定义域. 则称算子A为对称算子;如果对任意非零函数$u\in\mathscr{D}_A$,不等式
$$(Au,u)>0 \tag{3.21}$$
成立,则称算子A为正算子;如果存在一个常数$\gamma>0$,使

$$(Au,u) \geqslant \gamma^2 \|u\|_{L_2}^2, \quad \forall u \in \mathscr{D}_A \tag{3.22}$$

成立，则称算子A为正定算子.

可以证明，算子$A = -\Delta$在由(3.19)式定义的$\mathscr{D}_A$上是正定算子.

证明 因为

$$\begin{aligned}(-\Delta u,u) &= -\int_\Omega u\Delta u \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \\ &= -\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s + \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},\end{aligned}$$

而由Friedrichs不等式(见第二章§1.(1.32)式)，有

$$\|\nabla u\|_{L_2}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \geqslant \frac{1}{c^2}\int_\Omega u^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},$$

即有

$$(-\Delta u,u) \geqslant \gamma^2 \|u\|_{L_2}^2 \qquad \left(\gamma^2 = \frac{1}{c^2} > 0\right),$$

故算子$A = -\Delta$在$\mathscr{D}_A$上是正定的.

对于一般的算子方程的特征值问题，在算子A的定义域$\mathscr{D}_A$上需引进新的内积

$$[u,v] = (Au,v) \tag{3.23}$$

和模

$$\|u\|_{H_A} = \sqrt{[u,u]} = \sqrt{(Au,u)}. \tag{3.24}$$

其完备化后的空间记作H_A，它是一个Hilbert空间. 这样可以得到关于一般算子方程特征值问题的下述结论:

基本定理 3 对于算子方程的特征值问题

$$Au - \lambda u = 0, \tag{3.17}$$

若A是其定义域$\mathscr{D}_A$上的线性对称正定算子，且假定$\mathscr{D}_A$在Hilbert空间H_A中稠密，又若嵌入算子$I: H_A \to L_2$是紧算子，则其特征值和特征函数具有下述性质:

(i) 所有的特征值都是正实数,即$\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots)$;

(ii) 所有的特征值组成一个单调非减的、并以无穷远点为凝聚点的序列,即

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty;$$

(iii) 不同的特征值λ所对应的特征函数u在区域Ω上互相正交,即当$\lambda_j\neq\lambda_k$时,相应的特征函数u_j和u_k有关系式

$$(u_j,u_k)=0\qquad(j\neq k);\tag{3.25}$$

(iv) 所有的特征函数u_n $(n=1,2,\cdots)$构成空间$L_2(\Omega)$的一组完全正交基,即对任意的函数$f\in L_2(\Omega)$,可按特征函数系$\{u_n\}$$(n=1,2,\cdots)$展成广义的Fourier级数

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n,\tag{3.26}$$

其中

$$c_n=\frac{\int_\Omega fu_n\,\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega u^2\mathrm{d}\Omega}\qquad(n=1,2,\cdots),\tag{3.27}$$

亦即

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{n=1}^{N}c_n u_n\right\|_{L_2}=0.\tag{3.28}$$

3.3 奇异 Sturm-Liouville问题

考虑圆域上轴对称热传导方程混合问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0<r<l,t>0, \quad (3.29)\\ u=0, & r=l,t\geqslant0, \quad (3.30)\\ u、\dfrac{\partial u}{\partial r}\text{有界}, & r=0,t\geqslant0, \quad (3.31)\\ u=\varphi(r), & 0\leqslant r\leqslant l,t=0. \quad (3.32)\end{cases}$$

令

$$u(r,t)=R(r)T(t), \tag{3.33}$$

代入方程(3.29)和边界条件(3.30)、(3.31)，得到带参数λ的常微分方程

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \tag{3.34}$$

以及特征值问题

$$\begin{cases} R''(r)+\dfrac{1}{r}R'(r)+\lambda R(r)=0, & (3.35)\\ R(r)\,|_{r=l}=0, & (3.36)\\ R(0)<\infty,\ R'(0)<\infty. & (3.37)\end{cases}$$

方程(3.35)即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda rR=0. \tag{3.38}$$

在经变量代换$x=r\sqrt{\lambda}$，并记$y(x)=R\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$后可化为

$$x^2y''(x)+xy'(x)+x^2y(x)=0. \tag{3.39}$$

这是零阶Bessel方程. 而方程(3.38)正是一维情形的Sturm－Liouville方程(2.1)，当$p(r)=s(r)=r$时的特例. 但是在区间$[0,l]$上考虑时，在区间端点$r=0$处有$p(0)=s(0)=0$，不满足Sturm－Liouville问题所要求的在$[0,l]$上$p(r)\geqslant p_0>0$及$s(r)>0$的条件，因而这是一个奇异的Sturm－Liouville方程. 对于这种情形，我们所关心的是：相应的特征值问题，其特征值和特征函数是否还具有Sturm－Liouville问题基本定理中的四条重要性质?

从§2中的论证可知，具有基本定理中性质(i)(iii)的关键是要相应的Green公式

$$\int_a^b (vLu-uLv)\mathrm{d}x=0 \tag{3.40}$$

成立. 在特征值问题(3.35)—(3.37)中，条件(3.37)保证了关系式(3.40)的成立，于是仿照§2中性质(i)和(iii)的证明，可知其所有的特征值都是正数，且特征函数系在区间$[0,l]$上带权$s(r)=r$正交. 至于性质(ii)和(iv)，由于$p(x)$退化为$p(x)\geqslant 0$，所以§2中的定理6(即关于Sobolev空间的嵌入定理)就不能直接得到，需要建立关

于带退化权模的Sobolev空间嵌入定理. 对于这个问题我们在这里不打算再作进一步的深入讨论. 但是, 值得指出的是, 对具有奇性的Bessel方程的特征值问题(3.35)—(3.37), 可以通过适当的变换, 化为圆域D: $x^2+y^2<l^2$上的特征值问题, 而消除其奇异性.

事实上, 我们对方程(3.35)两边乘以R, 并对r在区间$[0,l]$上积分, 对θ从0到2π积分, 得

$$\int_0^{2\pi}\int_0^l R\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)drd\theta+\lambda\int_0^{2\pi}\int_0^l rR^2drd\theta=0. \tag{3.41}$$

利用分部积分及条件(3.36), 有

$$\begin{aligned}\int_0^l R\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)dr&=r\frac{dR}{dr}R\Big|_0^l-\int_0^l r\left(\frac{dR}{dr}\right)^2dr\\&=-\int_0^l r\left(\frac{dR}{dr}\right)^2dr.\end{aligned}$$

于是式(3.41)可写成

$$\int_0^{2\pi}\int_0^l r\left(\frac{dR}{dr}\right)^2drd\theta-\lambda\int_0^{2\pi}\int_0^l rR^2drd\theta=0.$$

转换到直角坐标系, 且记$R(r)=\overline{R}(x,y)$, 则有

$$\iint\limits_D|\nabla\overline{R}|^2dxdy-\lambda\iint\limits_D\overline{R}^2dxdy=0. \tag{3.42}$$

这时函数R在$r=\sqrt{x^2+y^2}=0$处的有界性条件(3.37)是自然满足的. 二维的特征值问题(3.42)是无奇性的, 所以它具有多维特征值问题基本定理中所叙述的性质(i)—(iv).

§4. 应用实例

在一般数学物理方程的教材中, 我们讲Fourier方法所用的理论基础是数学分析中所讲授的Fourier级数理论. 但是, 事实上从数理方程所提供的大量实例中, 可以看出它只适用于少数几个特殊方程和特殊的边界条件. 对大量的数理方程定解问题, 虽然可以用Fourier方法(分离变量法)求出它的解的表达式, 但我们只能说它们

是形式解．因为缺乏应有的理论去保证这个形式解就是真正的解．

特征值问题的基本定理奠定了Fourier方法的理论基础，它为Fourier方法的应用提供了广阔的前景．对大量的特征值问题，其特征值和相应特征函数的求出是不容易的，甚至只能求助于数值解法求得近似解．但是有了特征值问题的基本定理后，即使我们并不知道具体的特征值或特征函数的形式，我们仍然可以通过基本定理得到解的表达式．从而有可能通过已知特征值和特征函数的性质，得到解的一些重要信息．下面我们举一些例子来说明基本定理的应用．

例 1 求解下述一维热传导方程混合问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t), & 0<x<\pi,\ t>0, & (4.1)\\ -u_x(0,t)+u(0,t)=0, & t\geqslant 0, & (4.2)\\ u_x(\pi,t)+u(\pi,t)=0, & t\geqslant 0, & (4.3)\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant \pi . & (4.4)\end{cases}$$

解 用分离变量法(Fourier方法)．先考虑(4.1)相应齐次方程的特征值问题：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<\pi, & (4.5)\\ -X'(0)+X(0)=0, & & (4.6)\\ X'(\pi)+X(\pi)=0 . & & (4.7)\end{cases}$$

根据基本定理知，所有的特征值$\lambda_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$．现求出其具体形式．

令$\lambda=\mu^2(\mu>0)$，此时方程(4.5)的通解为

$$X(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x,$$

$$X'(x)=-\mu A\sin\mu x+\mu B\cos\mu x.$$

由边界条件(4.6)、(4.7)，得

$$-\mu B+A=0,$$

$$-\mu A\sin\mu\pi+\mu B\cos\mu\pi+A\cos\mu\pi+B\sin\mu\pi=0.$$

于是推得μ应适合的超越方程

$$(1-\mu^2)\sin\mu\pi+2\mu\cos\mu\pi=0,$$

即

$$\frac{\mu^2-1}{2\mu}=\cot \mu\pi \tag{4.8}$$

利用图解法，把上述方程的解看成是曲线$y=\dfrac{\mu^2-1}{2\mu}$与$y=\cot \mu\pi$在$\mu>0$时的交点.从图3－1可看出此超越方程有无穷多个正根μ_i $(i=1,2,\cdots)$，且

$$0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<\cdots$$

所以，特征值问题(4.5)—(4.7)存在无穷多个特征值

$$\lambda_n=\mu_n^2 \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{4.9}$$

相应的特征函数为

$$X_n(x)=B_n(\mu_n \cos \mu_n x+\sin \mu_n x) \quad (n=1,2,\cdots), \tag{4.10}$$

其中B_n是任意常数. 为简单起见，不妨取$B_n=1$.

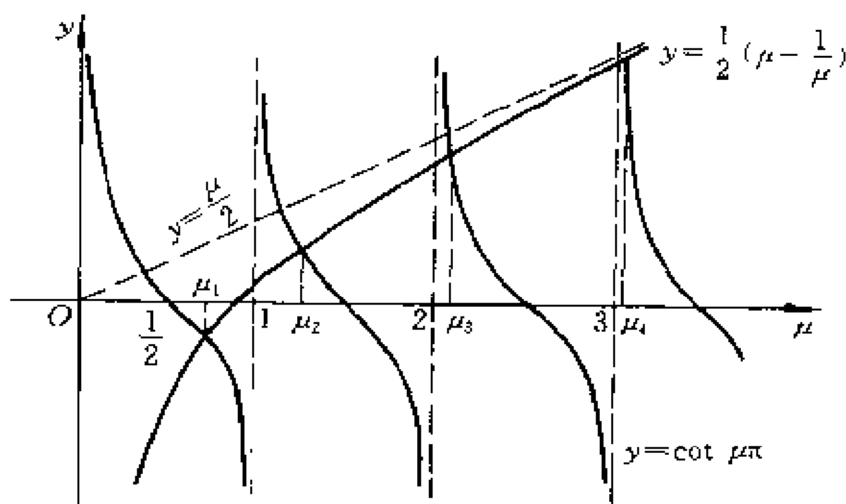


图 3－1

根据Sturm－Liouville问题的基本定理知，特征函数系$\{X_n(x)\}$ $(n=1,2,\cdots)$是空间$L_2[0,\pi]$的一组完全正交基.因此，可设原非齐次方程定解问题(4.1)—(4.4)的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, X_n(x), \tag{4.11}$$

其中$T_n(t)$为待定函数，并将已知函数$f(x,t)$和$\varphi(x)$按特征函数系$\{X_n(x)\}$展成广义Fourier级数

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x) \tag{4.12}$$

和

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x). \tag{4.13}$$

其中系数$f_n(t)$和φ_n利用函数系$\{X_n(x)\}$的正交性,可计算得为:

$$f_n(t)=\frac{1}{\|X_n\|_{L_2}^2}(f,X_n), \qquad \varphi_n=\frac{1}{\|X_n\|_{L_2}^2}(\varphi,X_n). \tag{4.14}$$

这里

$$\|X_n\|_{L_2}=\sqrt{(X_n,X_n)}=\sqrt{\int_0^{\pi}[X_n(x)]^2\mathrm{d}x}. \tag{4.15}$$

将(4.11)—(4.13)代入方程(4.1)和初始条件(4.4),可得$T_n(t)$应满足的常微分方程初值问题

$$\begin{cases}T_n'(t)+\lambda_n T_n(t)=f_n(t), & (4.16)\\ T_n(0)=\varphi_n. & (4.17)\end{cases}$$

解得

$$T_n(t)=\varphi_n\mathrm{e}^{-\lambda_n t}+\int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, \tag{4.18}$$

从而原定解问题(4.1)—(4.4)的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\|X_n\|_{L_2}^2}(\varphi,X_n)\mathrm{e}^{-\lambda_n t}X_n(x)\\&\quad+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\|X_n\|_{L_2}^2}(f,X_n)X_n(x)\mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\xi)X_n(x)}{\|X_n\|_{L_2}^2}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\right]\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\\&\quad+\int_0^t\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\xi)X_n(x)}{\|X_n\|_{L_2}^2}\mathrm{e}^{-\lambda_n(t-\tau)}\right]f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

令

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\xi)X_n(x)}{\|X_n\|_{L_2}^2}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}. \tag{4.19}$$

则解$u(x,t)$可表示为

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi. \tag{4.20}$$

例 2 均质长圆柱体，半径为l，侧面温度保持u_0，初始温度分布为$\varphi(r)$，其中r为柱体内任一点到对称轴的距离.求解柱体内温度的变化状况.

解 这是轴对称的热传导问题.考虑到定解条件的特点，若以$u(r,t)$表示圆柱体内到对称轴(取作z轴)距离为r的点在时刻t的温度，则归结为求解二维圆域上的定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0<r<l,t>0, \quad (4.21)\\ u\big|_{r=l}=u_0, & t\geqslant 0, \quad (4.22)\\ u\big|_{t=0}=\varphi(r), & r\leqslant l. \quad (4.23)\end{cases}$$

先把边界条件齐次化，令

$$u(r,t)=w(r,t)+u_0, \tag{4.24}$$

则$w(r,t)$满足齐次边界条件的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\right), & 0<x<l,t>0, \quad (4.25)\\ w\big|_{r=l}=0, & t\geqslant 0, \quad (4.26)\\ w\big|_{t=0}=\varphi(r)-u_0, & r\leqslant l. \quad (4.27)\end{cases}$$

采用分离变量法，令

$$w(r,t)=R(r)T(t), \tag{4.28}$$

代入方程(4.25)及边界条件(4.26)，可得常微分方程

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \tag{4.29}$$

及特征值问题

$$\begin{cases} R''(r)+\dfrac{1}{r}R'(r)+\lambda R(r)=0, & (4.30)\\ R(l)=0. & (4.31)\end{cases}$$

正如我们在§3曾指出过，这是一个有奇性的Bessel方程特征值问题，但作适当变换，转换到直角坐标系后可消除奇性．因而仍具有基本定理中所叙述的性质(i)—(iv).

根据基本定理知，其所有的特征值$\lambda_n>0(n=1,2,\cdots)$，具体解得特征值为

$$\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{4.32}$$

相应特征函数

$$R_n(r)=\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{l}r\right) \qquad (n=1,2,\cdots), \tag{4.33}$$

其中$\mu_n(n=1,2,\cdots)$是零阶Bessel函数$\mathrm{J}_0(x)$的正零点.

将(4.32)代入方程(4.29)，可解得

$$T_n(t)=c_n\mathrm{e}^{-\frac{a^2\mu_n^2}{l^2}t} \qquad (n=1,2,\cdots), \tag{4.34}$$

从而可得原定解问题(4.21)—(4.23)的解

$$\begin{aligned} u(r,t)&=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)T_n(t)\\ &=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\frac{a^2\mu_n^2}{l^2}t}\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{l}r\right), \end{aligned} \tag{4.35}$$

其中系数c_n可根据基本定理的性质(iii)和(iv)求得:

$$c_n=\frac{\int_0^l[\varphi(r)-u_0]\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{l}r\right)r\mathrm{d}r}{\left\|\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{l}r\right)\right\|^2}. \tag{4.36}$$

这里

$$\left\|\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{l}r\right)\right\|^2=\int_0^l\mathrm{J}_0^2\left(\frac{\mu_n}{l}r\right)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{l}{2}[\mathrm{J}_1(\mu_n)]^2, \tag{4.37}$$

$\mathrm{J}_1(x)$为一阶Bessel函数，而$\mu_n\ (n=1,2,\cdots)$是$\mathrm{J}_0(x)$的正零点.

例 3 讨论高维波动方程混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=f(x,t), & x\in\Omega,\ t>0, \quad (4.38)\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geqslant 0, \quad (4.39)\\ u\,|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\,|_{t=0}=\psi(x), & x\in\overline{\Omega} \quad (4.40)\end{cases}$$

的共振问题，其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

解 先考虑方程(4.38)相应齐次方程的特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta X(x)-\lambda X(x)=0, & x\in\Omega, \quad (4.41)\\ X(x)=0, & x\in\partial\Omega. \quad (4.42)\end{cases}$$

根据多维Sturm－Liouville问题的基本定理知，存在无穷多个正的特征值$\lambda_n\ (n=1,2,\cdots)$，有

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty.$$

相应的特征函数$X_n(x)(n=1,2,\cdots)$构成$L_2(\Omega)$的一组完全正交基，即有

$$(X_n,X_m)=\int_\Omega X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x=\delta_{n,m}=\begin{cases}0, & n\neq m;\\ 1, & n=m.\end{cases} \tag{4.43}$$

定解问题(4.38)—(4.40)的解$u(x,t)$可以按特征函数系$\{X_n(x)\}$展成无穷级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x). \tag{4.44}$$

系统在时刻t的能量

$$E(t)=\int_\Omega |u_t|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x. \tag{4.45}$$

上式右端第一项是系统的动能，第二项是势能. 把式(4.44)代入

(4.45)，得

$$E(t)=\int_{\Omega}\left[\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(t)X_n(x)\right]^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\left[\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\nabla X_n(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[T_n'(t)T_m'(t)(X_n,X_m)+T_n(t)T_m(t)(\nabla X_n,\nabla X_m)\right].$$

根据式(3.16)，有

$$(\nabla X_n,\nabla X_m)-\lambda_n(X_n,X_m)=0,$$

即

$$(\nabla X_n,\nabla X_m)=\lambda_n(X_n,X_m)=\lambda_n\delta_{nm}.$$

于是，得

$$E(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(T_n'(t))^2+\lambda_n T_n^2(t)\right]\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}E_n(t). \tag{4.46}$$

记

$$\lambda_n=\mu_n^2 \qquad (n=1,2,\cdots), \tag{4.47}$$

称μ_n为系统的特征频率(也称固有频率)，则$E_n(t)$是对应于特征频率μ_n的能量.

若系统受到周期性外力的作用，力密度为

$$f(x,t)=h(x)\sin\omega t. \tag{4.48}$$

我们将证明当周期外力的频率与系统的某一特征频率μ_n相同时，即$\omega=\mu_n$时，随着时间t的无限增大，能量$E(t)$将趋于无穷大，即系统产生共振现象.

为此，利用特征函数系$\{X_n(x)\}$的正交性和完全性，将已知函数$f(x,t)$、$\varphi(x)$和$\psi(x)$展成无穷级数

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x),$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n X_n(x), \tag{4.49}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n X_n(x),$$

其中

$$f_n(t)=\frac{(f,X_n)}{\|X_n\|^2}=\frac{(h,X_n)}{\|X_n\|^2}\sin\omega t=h_n\sin\omega t.$$

$$\alpha_n=\frac{(\varphi,X_n)}{\|X_n\|^2},\quad \beta_n=\frac{(\psi,X_n)}{\|X_n\|^2} \tag{4.50}$$

代入方程(4.38)和初始条件(4.40)，得到待定函数$T_n(t)$所满足的常微分方程初值问题

$$\begin{cases} T_n''(t)+\mu_n^2T_n(t)=h_n\sin\omega t, \\ T_n(0)=\alpha_n, \\ T_n'(0)=\beta_n. \end{cases} \tag{4.51}$$

解得

$$T_n(t)=\alpha_n\cos\mu_n t+\frac{\beta_n}{\mu_n}\sin\mu_n t$$

$$+\frac{h_n}{\mu_n}\int_0^t\sin\mu_n(t-\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau. \tag{4.52}$$

进一步的积分计算可得，当$\omega\neq\mu_n$时

$$T_n(t)=\alpha_n\cos\mu_n t+\frac{\beta_n}{\mu_n}\sin\mu_n t+\frac{h_n\omega}{\mu_n(\omega^2-\mu_n^2)}\sin\mu_n t$$

$$-\frac{h_n}{\omega^2-\mu_n^2}\sin\omega t; \tag{4.53}$$

而当$\omega=\mu_n$时

$$T_n(t)=\left(\alpha_n-\frac{h_n}{2\mu_n}t\right)\cos\mu_n t+\frac{1}{\mu_n}\left(\beta_n+\frac{h_n}{2\mu_n}\right)\sin\mu_n t. \tag{4.54}$$

如果我们把在频率为ω的周期外力作用下系统的能量记作

$$E^\omega(t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n^\omega(t),$$

其中

$$E_n^\omega(t)=[T_n'(t)]^2+\mu_n^2T_n^2(t).$$

于是，当$\omega\neq\mu_n$时

$$E_n^\omega(t)=\alpha_n^2\mu_n^2+\left(\beta_n+\frac{h_n\omega}{\omega^2-\mu_n^2}\right)^2+\frac{h_n^2}{(\omega^2-\mu_n^2)^2}(\omega^2\cos^2\omega t+\mu_n^2\sin^2\omega t)$$

$$+\frac{2\alpha_n h_n\mu_n}{\omega^2-\mu_n^2}(\omega\sin\mu_n t\cos\omega t-\mu_n\cos\mu_n t\sin\omega t)$$

$$-\frac{2h_n}{\omega^2-\mu_n^2}\left(\beta_n+\frac{h_n\omega}{\omega^2-\mu_n^2}\right)(\omega\cos\mu_n t\cos\omega t$$

$$+\mu_n\sin\mu_n t\sin\omega t); \tag{4.55}$$

而当$\omega=\mu_n$时，

$$E_n^\omega(t)=\alpha_n^2\mu_n^2+\beta_n^2+\frac{h_n^2}{4}t^2-\alpha_n h_n\mu_n t+\frac{h_n}{\mu_n}\left(\beta_n+\frac{h_n}{4\mu_n}\right)\sin^2\mu_n t$$

$$+\frac{h_n}{\mu_n}\left(\alpha_n\mu_n-\frac{h_n}{2}t\right)\sin\mu_n t\cos\mu_n t. \tag{4.56}$$

由式(4.56)可见，当$t\to\infty$时

$$E_n^\omega(t)\to\infty.$$

此即表明当周期外力的频率ω与系统的某一特征频率μ_n相同时，随着时间t的无限增大，系统的能量$E^\omega(t)$将趋于无穷大，产生共振现象.

例 4 讨论由定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}+2\alpha u_t-\Delta u=g(x,t), & x\in\boldsymbol{\Omega}\subset\boldsymbol{R}^n, & (4.57)\\ u=0, & (x,t)\in\partial\boldsymbol{\Omega}\times[0,T], & (4.58)\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\overline{\boldsymbol{\Omega}}, & (4.59)\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\overline{\boldsymbol{\Omega}}, & (4.60)\end{cases}$$

所描述的系统的稳定性，其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

解 先考虑与(4.57)相应齐次方程的特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta X(x)-\lambda X(x)=0, & x\in\boldsymbol{\Omega}, & (4.61)\\ X(x)=0, & x\in\partial\boldsymbol{\Omega}. & (4.62)\end{cases}$$

根据多维算子方程特征值问题的基本定理知，存在无穷多个正特征值

$$\lambda_n = \mu_n^2 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

和相应的特征函数

$$X_n(x) \qquad (n=1,2,\cdots),$$

构成空间$L_2(\Omega)$的一组完全正交基.

令定解问题(4.57)—(4.60)的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x). \tag{4.63}$$

类似例3中的计算，可得到系统的能量为

$$E(t)=\int_\Omega u_t^2 \mathrm{d}x+\int_\Omega (-\Delta u)u\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(T_n'(t))^2+\lambda_n T_n^2(t)\right]. \tag{4.64}$$

而待定函数$T_n(t)$应满足常微分方程初值问题

$$\begin{cases} T_n''(t)+2\alpha T_n'(t)+\lambda_n T_n(t)=g_n(t), & (4.65)\\ T_n(0)=\alpha_n, & (4.66)\\ T_n'(0)=\beta_n. & (4.67)\end{cases}$$

其中

$$g_n(t)=\frac{(g,X_n)}{\|X_n\|^2},$$

$$\alpha_n=\frac{(\varphi,X_n)}{\|X_n\|^2},\quad \beta_n=\frac{(\psi,X_n)}{\|X_n\|^2}. \tag{4.68}$$

当$0<\alpha<\mu_1$($\mu_1^2=\lambda_1$是特征值问题(4.61)、(4.62)的最小特征值)时，解得

$$T_n(t)=\alpha_n e^{-\alpha t}\cos\sqrt{\mu_n^2-\alpha^2}\,t+\frac{\alpha\alpha_n+\beta_n}{\sqrt{\mu_n^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}\sin\sqrt{\mu_n^2-\alpha^2}\,t$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\mu_n^2-\alpha^2}}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\sin\sqrt{\mu_n^2-\alpha^2}\,(t-\tau)g_n(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.69}$$

在对能量$E(t)$进行一些运算和简化后，可得估计式

$$E(t) \leqslant \frac{12\lambda_1}{\lambda_1 - \alpha^2} e^{-2\alpha t} E(0) + \frac{9\lambda_1}{\alpha^2(\lambda_1 - \alpha^2)} G. \tag{4.70}$$

其中

$$G = \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} [g(x, t)]^2 \mathrm{d}x. \tag{4.71}$$

从上述不等式可以看出，定解问题(4.57)—(4.60)的解关于时间t是指数阶衰减的，因而是稳定的，且关于持续不断的扰动$g(x, t)$也是稳定的.

第四章　连续介质力学的数学模型

连续介质力学是一种宏观力学，它不考虑物质内部微观的分子结构，而只从宏观上研究物质的运动(流动和变形).从数学上讲，假设物质充满整个所考虑的空间区域，而描述运动的所有物理量如压力、密度、位移、速度……，都是给定在这个区域上的连续可微函数(当然可能除去个别的奇点、奇线和奇面).

流体(液体和气体)的运动，固体的变形当然是连续介质力学研究的主要对象．但是像渗流(流体通过多孔介质的流动)、交通流……这样一些问题，在一定条件下亦可纳入连续介质力学的研究框架.这种从更广意义下对连续介质力学的理解，将有助于从数学上对各种不同类型的实际问题给出统一的数学处理和理解.

§1. 预 备 知 识

1.1　考虑初始时刻处于空间某位置的一团介质$V(0)$，在t时刻运动到空间另一位置时，记为$V(t)$.设(X_1, X_2, X_3)是$V(0)$中的任一点，经t时刻后，该点的新位置是(x_1, x_2, x_3)，显然

$$x_i = x_i(t; X_1, X_2, X_3) \qquad (i=1,2,3),$$

它适合常微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_i \\ x_i(0) = X_i \end{cases} \qquad (i=1,2,3). \tag{1.1}$$

其中$v=\{v_1, v_2, v_3\}$是质点的速度向量.

为了描述上述介质的运动，显然有两套自变量可供选择:

1° 相对于固定的空间坐标系$\{O;x_1,x_2,x_3\}$，可以取(x_1,x_2,x_3,t)作为自变量.由此导出的介质运动方程(组)称为Euler形式.

2° 若把注意力集中到介质内每一质点的变化，自然可以把介质质点的初始位置和时间(X_1,X_2,X_3,t)作为自变量.由此得到的介质运动方程(组)称为Lagrange形式.

由常微分方程(组)解的存在唯一性定理知:
(x_1,x_2,x_3,t)与(X_1,X_2,X_3,t)的对应是一一的.设J为Jacobi行列式

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)},$$

而$J|_{t=0}=1$，以下不妨假设$J>0$.

1.2 在Euler形式中的一个函数$\phi(x_1,x_2,x_3,t)$对t的微商可以有两种不同意义:

1° 固定空间点(x_1,x_2,x_3)的位置，对t求微商，即通常的偏导数$\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$;

2° 对固定质点(X_1,X_2,X_3)沿着它所历经的路径对t求微商，称为全导数$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$.

显然，由(1.1)

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\phi\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\phi, \tag{1.2}$$

这里$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$表示微分算子:

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla=\sum_{i=1}^{3}v_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.3}$$

引理1 恒等式

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=(\nabla\cdot\boldsymbol{v})J \tag{1.4}$$

成立.这里$(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$表示函数，它是$\boldsymbol{v}$的散度.

（注意：$\boldsymbol{v}\cdot\nabla$与$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$有完全不同的意义，两者不能混同！）

证明 由行列式求导数的定义，并考虑到(1.1)，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial(\dot{x}_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}+\frac{\partial(x_1,\dot{x}_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}+\frac{\partial(x_1,x_2,\dot{x}_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)} \\
&= \frac{\partial(v_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}+\frac{\partial(x_1,v_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}+\frac{\partial(x_1,x_2,v_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}. \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

这里$\dot{x}_i=\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$. 由于

$$
\frac{\partial v_1}{\partial X_i}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial X_i}+\frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial X_i},
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(v_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)} &= \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\
\dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\
\dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3}
\end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}J,
\end{aligned}
$$

同理

$$
\frac{\partial(x_1,v_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}=\frac{\partial v_2}{\partial x_2}J,
$$

$$
\frac{\partial(x_1,x_2,v_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}=\frac{\partial v_3}{\partial x_3}J.
$$

将它们代入(1.5)，即得恒等式(1.4).

1.3 我们证明一个对下文推导守恒律方程非常有用的引理：

引理 2 设$L(x_1,x_2,x_3,t)$是定义在$V(t)$ $(t\geqslant 0)$上的连续可微函数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V(t)} L(x_1,x_2,x_3,t)\mathrm{d}x=\iiint\limits_{V(t)}\left[\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})L\right]\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

证明 由(1.4)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V(t)} L\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V(0)} LJ\mathrm{d}X\\ &=\iiint\limits_{V(0)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LJ)\mathrm{d}X\\ &=\iiint\limits_{V(0)}\left[\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})L\right]J\mathrm{d}X\\ &=\iiint\limits_{V(t)}\left[\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})L\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而引理2获证.

§2. 应 变 矩 阵

2.1 考虑物体在外力作用下产生的形变，设在外力作用下，物体内一点(X_1,X_2,X_3)移动到新的位置(x_1,x_2,x_3). 记位移向量$\boldsymbol{u}=\{u_1,u_2,u_3\}$，易知

$$\boldsymbol{u}=\{x_1-X_1,x_2-X_2,x_3-X_3\}.$$

即
$$u_i=x_i-X_i \qquad (i=1,2,3),$$

因此对于Euler形式

$$u_i=u_i(x_1,x_2,x_3,t)=x_i-X_i(x_1,x_2,x_3,t), \tag{2.1}$$

而对于Lagrange形式

$$u_i=u_i(X_1,X_2,X_3,t)=x_i(X_1,X_2,X_3,t)-X_i. \tag{2.2}$$

由于物体内各点具有不同的位移，因此物体产生拉伸和弯曲. 为了研究它们之间的关系，考虑在变形前后弧微分的变化.

在形变前，弧微分$\mathrm{d}S$为

$$\mathrm{d}S^2=\mathrm{d}X_1^2+\mathrm{d}X_2^2+\mathrm{d}X_3^2.$$

物体产生变形后，弧微分ds为

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2.$$

它们之差的Euler形式为

$$\begin{aligned}ds^2-dS^2&=\sum_{k=1}^{3}(dx_k^2-dX_k^2)\\&=\sum_{k=1}^{3}\left[dx_k^2-\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial X_k}{\partial x_i}dx_i\right)^2\right]\\&=\sum_{i,j=1}^{3}\left(\delta_{ij}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)dx_i\,dx_j\\&=\sum_{i,j=1}^{3}E_{ij}\,dx_i\,dx_j,\end{aligned}$$

其中

$$E_{ij}=\delta_{ij}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial X_k}{\partial x_j}. \tag{2.3}$$

我们称3×3矩阵(E_{ij})为应变矩阵的Euler形式.

显然，$E_{ij}=E_{ji}$，即(E_{ij})是对称矩阵.根据(2.1)，E_{ij}可改写为

$$\begin{aligned}E_{ij}&=\delta_{ij}-\sum_{k=1}^{3}\left(\delta_{ik}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{jk}-\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\\&=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

用完全相仿的推导，可以写出应变矩阵的Lagrange形式.由(2.2)

$$ds^2-dS^2=\sum_{i,j=1}^{3}L_{ij}\,dX_i\,dX_j,$$

其中

$$\begin{aligned}L_{ij}&=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial X_j}-\delta_{ij}\\&=\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial X_j}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

这里矩阵(L_{ij})称为应变矩阵的Lagrange形式.

2.2 假设物体形变充分小,即

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|、\left|\frac{\partial u}{\partial X_i}\right| \ll 1 \qquad (i=1,2,3),$$

因此高阶小量可以忽略,从而由(2.3),(2.4)得

$$E_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{2.5}$$

和

$$L_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i} \quad . \tag{2.6}$$

又由(2.2)

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right|=\left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}-\delta_{ij}\right| \ll 1 \qquad (i,j=1,2,3),$$

即

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\approx 0 \quad (i\neq j), \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_i}\approx 1 .$$

故对于任意可微函数

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_j}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\approx\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad . \tag{2.7}$$

这表示在小形变的假设下,如忽略高阶小量,则对x_i和对X_i的微商是相同的.把这个论断用到(2.5),(2.6)去,则有

$$E_{ij}=L_{ij} .$$

也就是说,在小形变的假设下,应变矩阵的Lagrange形式与Euler形式两者没有区别.

2.3 考察应变矩阵中每一个元素E_{ij}在小形变假设下的物理意义.

任给一平行于x_1轴的线元$\overline{AA_1}$,在外力作用下,它变为$\overline{A'A'_1}$.考虑它的相对伸长率ε_1(线应变).

设

$$\varepsilon_1=\frac{|\overline{A'A'_\Delta}|-|\overline{AA_\Delta}|}{|\overline{AA_\Delta}|}$$

$$A(x_1,x_2,x_3),\quad A_\Delta(x_1+\mathrm{d}x,x_2,x_3),$$
$$A'(x_1+u_1(A),x_2+u_2(A),x_3+u_3(A)),$$
$$A'_\Delta(x_1+\mathrm{d}x+u_1(A_\Delta),x_2+u_2(A_\Delta),x_3+u_3(A_\Delta)).$$

若$\mathrm{d}x>0$，由$|\mathrm{d}x|\ll 1$，略去高阶小量

$$u_i(A_\Delta)=u_i(A)+\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\mathrm{d}x.$$

故

$$\varepsilon_1=\sqrt{\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2}-1.$$

由小形变假设，不计高阶小量

$$\varepsilon_1=\sqrt{1+2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}-1$$
$$=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1}{2}E_{11}.\tag{2.8}$$

同理

$$\varepsilon_2=\frac{1}{2}E_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\tag{2.9}$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{2}E_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}.\tag{2.10}$$

即若不计因子1/2，E_{ii}表示物体在x_i方向的线应变.

2.4 考察$E_{ij}(i\neq j)$的物理意义.

设$\overline{OA_\Delta}$和$\overline{OB_\Delta}$分别是平行于x_1轴和x_2轴的线元，它们的坐标

分别是$O(x_1,x_2,x_3)$、$A_\Delta(x_1+\mathrm{d}x_1,x_2,x_3)$和$B_\Delta(x_1,x_2+\mathrm{d}x_2,x_3)$. 在外力作用下，它们分别变为$\overline{O'A'_\Delta}$和$\overline{O'B'_\Delta}$，其中$O'(x_1+u_1(O),x_2+u_2(O),x_3+u_3(O))$，$A'_\Delta(x_1+\mathrm{d}x_1+u_1(A_\Delta),x_2+u_2(A_\Delta),x_3+u_3(A_\Delta))$、$B'_\Delta(x_1+u_1(B_\Delta),x_2+\mathrm{d}x_2+u_2(B_\Delta),x_3+u_3(B_\Delta))$.线元$\overline{OA_\Delta}$、$\overline{OB_\Delta}$之间夹角为90°. 考虑它与$\overline{O'A'_\Delta}$、$\overline{O'B'_\Delta}$之间夹角的变化，这个差值称为角应变$\gamma_{12}$ 如图4-1所示.

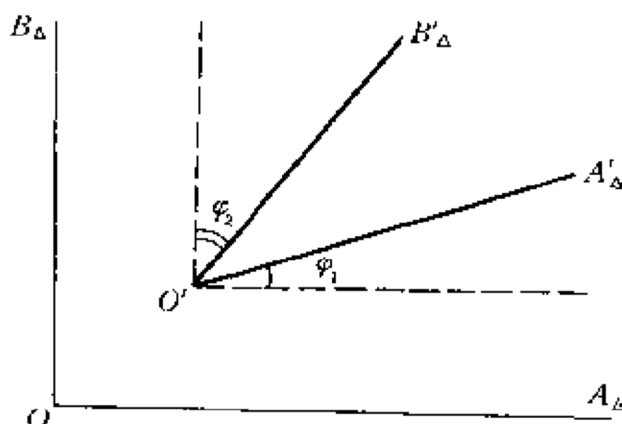


图 4-1

$$\gamma_{12}=\varphi_1+\varphi_2.$$

由小变形假设，我们可以认为O'、A'_Δ、B'_Δ位于与$OA_\Delta B_\Delta$平行的平面内，且不计高阶小量

$$\varphi_1=\tan\varphi_1=\frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\ \mathrm{d}x_1}{\left(1+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\ \mathrm{d}x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

同理

$$\varphi_2=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

即

$$\gamma_{12}=\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=E_{12}.$$

同理可知：对于两平行于x_i轴和x_j轴的线元在形变后所产生的角应变γ_{ij}，有

$$\gamma_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=E_{ij} \qquad (i\neq j). \tag{2.11}$$

在下文推导中，我们有时把应变矩阵写成以下形式：

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\end{bmatrix}.$$

把位移向量$\boldsymbol{u}$记作

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix},$$

那么由(2.8)—(2.11)得关系式

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{u} \tag{2.12}$$

其中$\boldsymbol{\partial}$表示6×3的微分算子矩阵

$$\boldsymbol{\partial}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1}\end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

2.5 引理 3 若在物体内所有的点上

$$E_{ij}=0 \qquad (i,j=1,2,3),$$

则物体作刚体运动(平移和转动),即

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{2.14}$$

或

$$u_1=u_1^0+\omega_2x_3-\omega_3x_2, \tag{2.15}$$

$$u_2=u_2^0+\omega_3x_1-\omega_1x_3, \tag{2.16}$$

$$u_3=u_3^0+\omega_1x_2-\omega_2x_1, \tag{2.17}$$

其中$\boldsymbol{u}_0=\{u_1^0,u_2^0,u_3^0\}$,$\boldsymbol{\omega}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$为常向量,$\boldsymbol{r}=\{x_1,x_2,x_3\}$.

证明 由$E_{11}=0$,即$\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}=0$,知

$$u_1=f_1(x_2,x_3).$$

由于$E_{12}=E_{21}=0$,有

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=0.$$

又由$E_{12}=E_{13}=E_{23}=0$,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right]\\&=0.\end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=c_1(\text{常数}),$$

$$u_1=f_1(x_2,x_3)=c_1x_2+h(x_3).$$

而由$E_{13}=E_{33}=0$，有

$$h''(x_3)=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}=-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)=0.$$

故

$$u_1=u_1^0+c_1x_2+d_1x_3. \tag{2.18}$$

同理

$$u_2=u_2^0+c_2x_1+d_2x_3, \tag{2.19}$$

$$u_3=u_3^0-c_3x_1+d_3x_2, \tag{2.20}$$

由$E_{12}=E_{23}=E_{13}=0$，得

$$c_1+c_2=0,$$
$$d_2+d_3=0,$$
$$d_1+c_3=0.$$

令$\omega_1=d_3$，$\omega_2=d_1$，$\omega_3=c_2$，由(2.18)—(2.20)即得(2.14).

§3. 应 力 矩 阵

3.1 应力是物体的内力.假设物体V在外力作用下处于平衡态.用平面S把V分成两部分V_1、V_2.以V_1为例.由于它同样处于平衡态，因此在V与S的截痕$S_V=V\cap S$上，V_1必受到一个作用力，这个力称为应力.

物体内任意一点P的应力是这样定义的:

定义1 设$P\in S_V$，$\boldsymbol{n}$为V_1在P点的外法向，在P点的应力$\boldsymbol{F}_n(P)$定义为

$$\boldsymbol{F}_n(P)=\lim_{\substack{\Delta S_V\to 0\\ \Delta S_V\subset S_V}}\frac{\Delta \boldsymbol{F}_n}{\Delta S_V}.$$

这里$\Delta\boldsymbol{F}_n$是作用在小块ΔS_V上的应力的合力.

从定义可以看出，物体内一点处的应力不仅依赖于点的位置，而且还与通过P点的平截面S(或它的法线方向$\boldsymbol{n}$)有关.因此，我们通常讲大小、方向、作用面是描写一个点的应力的三个要素.应力

的单位是[力/面积].

3.2 当作用面S给定以后，如何具体写出$\boldsymbol{F}_S(P)$的各个分量呢？为此通过P点作三个以坐标向量$\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,3)$为法线方向的平截面S_i $(i=1,2,3)$.不妨假设$\boldsymbol{e}_i$是截出的物体V_1的外法向，(否则可考虑V_2)，以$\boldsymbol{T}^{(i)}(P)$表示P点以S_i为作用面的应力.它在坐标轴上的投影分别是σ_{i1}、σ_{i2}、σ_{i3}，即

$$\boldsymbol{T}^{(i)}(P)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\boldsymbol{e}_j \quad ,$$

$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_{ij})$称为应力矩阵.它的元素$\sigma_{ij}$表示对于以$\boldsymbol{e}_i$为外法向的作用面，应力向量在$\boldsymbol{e}_j$方向的投影：$\sigma_{ii}$称为正应力，$\sigma_{ij}(i\neq j)$称为剪应力.

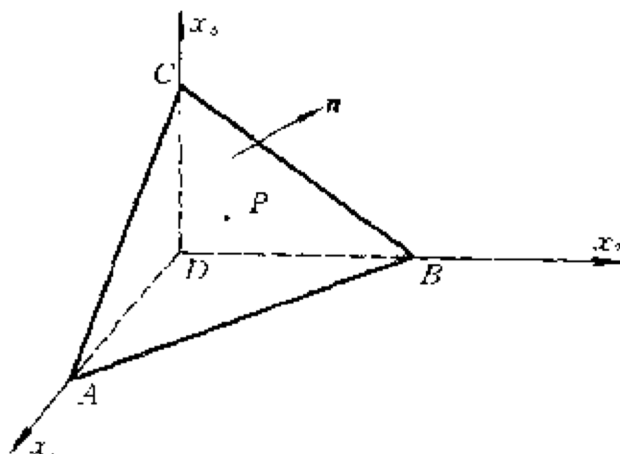
引理 4 在物体内任意一点P处，对于作用面为S的应力向量$\boldsymbol{F}_S(P)$，它可表示为

$$\boldsymbol{F}_S(P)=\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{\sigma}\ . \tag{3.1}$$

等式右端表示矩阵乘积，$\boldsymbol{n}$是作用面S的外法向.它可看作是1×3的矩阵，即

$$F_1^{(n)}=\sigma_{11}\cos(n,x_1)+\sigma_{21}\cos(n,x_2)+\sigma_{31}\cos(n,x_3),$$
$$F_2^{(n)}=\sigma_{12}\cos(n,x_1)+\sigma_{22}\cos(n,x_2)+\sigma_{32}\cos(n,x_3),$$
$$F_3^{(n)}=\sigma_{13}\cos(n,x_1)+\sigma_{23}\cos(n,x_2)+\sigma_{33}\cos(n,x_3),$$

证明 如图4-2作一个无穷小四面体$ABCD$.使得它的斜面



在S上，P点是它的(即$\triangle ABC$的)重心，而另外三个面各平行于坐标面，$|\overline{AD}|=\mathrm{d}x_1$，$|\overline{DB}|=\mathrm{d}x_2$，$|\overline{CD}|=\mathrm{d}x_3$.

由于应力矩阵$\boldsymbol{\sigma}$在物体内假定是连续的，而四面体充分小，因此可以认为：在四面体$ABCD$内，应力矩阵是常数矩阵：

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_{ij}(P))$$

在各个面上的受力情况可列表于下：

面积名称	外法向	面　积	应力向量的分量		
			在x_1轴	在x_2轴	在x_3轴
$\triangle ABC(S)$	$\boldsymbol{n}$	$\mathrm{d}S$	$F_1^{(n)}$	$F_2^{(n)}$	$F_3^{(n)}$
$\triangle BCD$	$-\boldsymbol{e}_1$	$\frac{1}{2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$	$-\sigma_{11}$	$-\sigma_{12}$	σ_{13}
$\triangle CDA$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\frac{1}{2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3$	$-\sigma_{21}$	$-\sigma_{22}$	$-\sigma_{23}$
$\triangle DAB$	$\boldsymbol{e}_3$	$\frac{1}{2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$	$-\sigma_{31}$	$-\sigma_{32}$	$-\sigma_{33}$

易见

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S\cos(n,x_1)&=\frac{1}{2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,\\
\mathrm{d}S\cos(n,x_2)&=\frac{1}{2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3,\\
\mathrm{d}S\cos(n,x_3)&=\frac{1}{2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

由于物体处于平衡态，作用在微小四面体上的所有外力的合力为零.从而有

$$\boldsymbol{F}_0^{(n)}+\boldsymbol{T}_0^{(1)}+\boldsymbol{T}_0^{(2)}+\boldsymbol{T}_0^{(3)}+\boldsymbol{F}_0=\mathbf{0}\ .\tag{3.3}$$

这里$\boldsymbol{F}_0^{(n)}$、$\boldsymbol{T}_0^{(1)}$、$\boldsymbol{T}_0^{(2)}$、$\boldsymbol{T}_0^{(3)}$分别为作用在斜面ABC以及直角三角形BCD、CDA和DAB上的应力向量，此外$\boldsymbol{F}_0$表示作用在微小四面体上的体力，它是$|\mathrm{d}x_i|$的三阶无穷小量，比面力$\boldsymbol{F}_0^{(n)}$和$\boldsymbol{T}_0^{(i)}$高一阶，因此可以忽略不计.

把式(3.3)写成分量形式

$$F_1^{(n)}\mathrm{d}S=\sigma_{11}\frac{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3}{2}+\sigma_{21}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3}{2}+\sigma_{31}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{2},$$

$$F_2^{(0)}\mathrm{d}S=\sigma_{12}\frac{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3}{2}+\sigma_{22}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3}{2}+\sigma_{32}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{2},$$

$$F_3^{(0)}\mathrm{d}S=\sigma_{13}\frac{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3}{2}+\sigma_{23}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3}{2}+\sigma_{33}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{2}.$$

把(3.2)代入立即得到(3.1).证毕.

3.3 在这一小段我们证明应力矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 是对称阵.

引理 5 $\qquad \sigma_{ij}=\sigma_{ji} \qquad (i,j=1,2,3).$ $\qquad$ (3.4)

证明 考虑无穷小四面体$ABCD$,并认为所有在这四个面上的应力都集中地作用于它们的重心.由于四面体处于平衡态,所有作用在这四面体的外力对斜面的重心P的合力矩为零.以同样理由略去体力产生的力矩,从而有

$$\boldsymbol{F}_0^{(0)}\times\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{T}_0^{(1)}\times\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{T}_0^{(2)}\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{T}_0^{(3)}\times\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}, \qquad (3.5)$$

其中

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{r}_i=-\frac{\mathrm{d}x_i}{3}\boldsymbol{e}_i \qquad (i=1,2,3).$$

我们有

$$\boldsymbol{T}_0^{(1)}\times\boldsymbol{r}_1=-\frac{\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3}{2}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{1i}\boldsymbol{e}_i\times\left(-\frac{\mathrm{d}x_1}{3}\right)\boldsymbol{e}_1$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3[-\sigma_{12}\boldsymbol{e}_3+\sigma_{13}\boldsymbol{e}_2].$$

同理

$$\boldsymbol{T}_0^{(2)}\times\boldsymbol{r}_2=\frac{1}{6}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3[\sigma_{21}\boldsymbol{e}_3-\sigma_{23}\boldsymbol{e}_1],$$

$$\boldsymbol{T}_0^{(3)}\times\boldsymbol{r}_3=\frac{1}{6}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3[-\sigma_{31}\boldsymbol{e}_2+\sigma_{32}\boldsymbol{e}_1].$$

将它们代入(3.5),立即得到

$$\frac{1}{6}dx_1dx_2dx_3[(\sigma_{32}-\sigma_{23})\boldsymbol{e}_1+(\sigma_{13}-\sigma_{31})\boldsymbol{e}_2+(\sigma_{21}-\sigma_{12})\boldsymbol{e}_3]$$

$$=\boldsymbol{0}.$$

从而(3.4)式获证.

§4. 守 恒 律

质量、动量、能量守恒律是任何连续介质运动所必须遵循的普遍规律.由此出发建立连续介质力学的数学模型.

4.1 质量守恒律

介质运动过程中质量永远保持不变.

在介质中任意截取一块 $V(t)$ $(t\geqslant 0)$, 考察它的质量, 由质量守恒律, 即

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{V(t)}\rho(x_1,x_2,x_3,t)dx=0,$$

其中ρ是介质的密度, 利用引理2, 得

$$\iiint\limits_{V(t)}\left[\frac{d\rho}{dt}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho\right]dx=0.$$

由所截小块$V(t)$的任意性, 即得连续性方程:

$$\frac{d\rho}{dt}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho=0, \tag{4.1}$$

或

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho=0.$$

即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{4.2}$$

4.2 动量守恒律

对于在运动中的介质, 它的动量变化率等于所有作用在它

上面的外力的总和.

以同样的方式截取小块$V(t)$，作用在它上面的外力有两类：一是体力$\boldsymbol{F}$(如重力)[力/体积]，二是面力，即作用于$V(t)$的边界$\partial V(t)$上的应力$\boldsymbol{T}^{(n)}$[力/面积].从而由动量守恒律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V(t)}\boldsymbol{v}\rho\mathrm{d}x=\iiint\limits_{V(t)}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x+\iint\limits_{\partial V(t)}\boldsymbol{T}^{(n)}\mathrm{d}S. \tag{4.3}$$

利用引理2和连续性方程(4.1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V(t)}\boldsymbol{v}\rho\mathrm{d}x=\iiint\limits_{V(t)}\left[\frac{\mathrm{d}(\rho\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\iiint\limits_{V(t)}\left[\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\iiint\limits_{V(t)}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x.$$

此外，由表达式(3.1)，利用Green公式

$$\iint\limits_{\partial V(t)}\boldsymbol{T}^{(n)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\partial V(t)}\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_{V(t)}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}x,$$

这里∇为1×3的微分算子矩阵.

将它们代入(4.3)，并由$V(t)$的任意性，立即得到运动方程组

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{4.4}$$

4.3 能量守恒律

介质在运动过程中的总能量(内能与动能之和)的变化率等于单位时间外力作功和通过边界流入与介质内部生成的热量之和.

设e是每单位质量所包含的内能，$\boldsymbol{q}$是热流密度向量[焦耳/面积]，Q是源汇强度[焦耳/体积].

从而对于介质内任意截取的小块$V(t)$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint\limits_{V(t)}\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\rho\mathrm{d}x+\iiint\limits_{V(t)}e\rho\mathrm{d}x\right)$$

$$=\iiint\limits_{V(t)}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x+\iint\limits_{\partial V(t)}\boldsymbol{T}^{(n)}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S-\iint\limits_{\partial V(t)}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S+\iiint\limits_{V(t)}Q\mathrm{d}x,\tag{4.5}$$

这里$\boldsymbol{n}$是边界面$\partial V(t)$的外法向.

利用引理2和连续性方程(4.1)、运动方程组(4.4),得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V(t)}|\boldsymbol{v}|^2\rho\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V(t)}\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}|^2+2\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\rho|\boldsymbol{v}|^2(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}x$$

$$=\iiint\limits_{V(t)}[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}+(\nabla\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{v}]\mathrm{d}x.\tag{4.6}$$

此外

$$\iint\limits_{\partial V(t)}\boldsymbol{T}^{(n)}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\partial V(t)}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_{V(t)}\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v})\mathrm{d}x$$

$$=\iiint\limits_{V(t)}[(\nabla\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}]\mathrm{d}x,\tag{4.7}$$

这里$(\nabla\boldsymbol{\sigma})$、$(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v})$表示矩阵乘积.$\boldsymbol{v}$看作一个$3\times1$矩阵;$\boldsymbol{D}$是$3\times3$矩阵,$\boldsymbol{D}=(d_{ij})$, $d_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ $(i,j=1,2,3)$.记号$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}$表示:

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}=\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}d_{ij}.$$

因为写成分量形式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v})=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}v_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij}\right)v_j + \sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

$$=(\nabla \boldsymbol{\sigma})\cdot \boldsymbol{v}+ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D},$$

故(4.7)式右端最后的等式成立.此外,由Green公式

$$\iint_{\partial V(t)} \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S= \iiint_{V(t)} \nabla\cdot\boldsymbol{q}\mathrm{d}x . \tag{4.8}$$

将(4.6)—(4.8)代入(4.5),得

$$\iiint_{V(t)} \rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x= \iiint_{V(t)} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} -\nabla\cdot \boldsymbol{q}+ Q)\mathrm{d}x.$$

由 $V(t)$的任意性,即得能量方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}= \boldsymbol{\sigma} :\boldsymbol{D} -\nabla\cdot \boldsymbol{q}+ Q . \tag{4.9}$$

由连续性方程(4.1)、运动方程组(4.4)和能量方程(4.9)构成了连续介质力学最基本的方程组,其中外力$\boldsymbol{F}$、源汇强度Q为已知函数.(4.1)、(4.4)和(4.9)为由五个方程构成的方程组,它包含有十四个未知函数: $\boldsymbol{\sigma}$ (六个)、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{q}$(各三个)和ρ、e, 因此这个方程组并不封闭.为此我们需要在不同假设下,根据具体问题的不同特点,给出一些相容性定律,使它成为一个封闭方程组.

§5. 相容性定律和数学模型(流体情形)

5.1 不可压理想流体运动方程组

理想流体即在流体运动中不考虑内摩擦(粘性)和热传导.根据这个假设,相对运动着的介质,在它们的接触面上,只有垂直于接触面的正压力p,而没有切向摩擦力.因此对于不可压理想流体,我们有

$$\rho = 常数, \tag{5.1}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \qquad (i, j=1,2,3). \tag{5.2}$$

把它们代入方程组(4.1)、(4.4)，即得运动方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{5.3}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}-\nabla p . \tag{5.4}$$

这是一个由四个未知数p、$\boldsymbol{v}$和四个方程组成的封闭方程组，称为Euler方程组．

特款 1 对于静止流体，即$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，由(5.4)得

$$\boldsymbol{F}-\nabla p=\boldsymbol{0} . \tag{5.5}$$

若外力$\boldsymbol{F}$是重力，$\boldsymbol{e}_3$的方向指向下面，则

$$\boldsymbol{F}=\{0,0,\rho g\} .$$

设流体表面($x_3=0$)的压力为p_0，那么积分(5.5)式，得

$$p=p_0+\rho g x_3 .$$

这就是流体静力学定律．

特款 2 若流体的运动是定常和无旋的，即

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=0 \quad 和 \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}, \tag{5.6}$$

由恒等式[1]

$$\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{v}|^2=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{v} ,$$

方程组(5.4)可改写为

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{v}|^2-\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{v}\right]=\boldsymbol{F}-\nabla p .$$

由假设(5.6)，上述方程组简化为

$$\frac{\rho}{2}\nabla|\boldsymbol{v}|^2=\boldsymbol{F}-\nabla p . \tag{5.7}$$

---

[1] 考虑$\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$的第一个分量

$$v_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)-v_3\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)=v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\left(v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_1}-\sum_{i=1}^{3}v_i\frac{\partial v_1}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}|\boldsymbol{v}|^2-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_1.$$

同理可以证明其它两个分量亦有类似的等式．

假设$\boldsymbol{F}$是重力，取$\boldsymbol{e}_3$垂直向上，即

$$\boldsymbol{F}=\{0,0,-\rho g\}\ .$$

故由ρ是常数，(5.7)有形式

$$\nabla\left(\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}+gx_3+\frac{p}{\rho}\right)=\mathbf{0}\ ,$$

即

$$\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2g}+x_3+\frac{p}{\rho g}=\text{常数}\ . \tag{5.8}$$

这就是著名的Bernolli公式.因此只要已知$\boldsymbol{v}$，由(5.8)即得压力p.如何求$\boldsymbol{v}$呢?

由流体是无旋的，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$.因此若区域是单连通的，那么由Stokes定理知，速度场必是有势场，即存在势函数φ，使得

$$\boldsymbol{v}=-\nabla\varphi\ . \tag{5.9}$$

将它代入连续性方程(5.3)，得

$$-\Delta\varphi=0, \tag{5.10}$$

即φ是Laplace方程的解.为了确定这个解需要增加边界条件

$$\varphi\Big|_{\partial\Omega}\text{或}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}\text{为已知} \tag{5.11}$$

(请注意：$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$，故$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0$表示边界是固壁).

5.2 不可压粘性流体运动方程组

由于流体存在粘性，流体之间相对运动存在切向摩擦，因此应力分量有形式

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\hat{\sigma}_{ij}\qquad (i,j=1,2,3)\ . \tag{5.12}$$

设应变的变化率矩阵为

$$\hat{\mathbf{e}}=(\hat{e}_{ij})\ ,$$

其中

$$\hat{e}_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\qquad (i,j=1,2,3)\ . \tag{5.13}$$

考虑$\hat{\sigma}_{ij}$与$\hat{e}_{ij}$呈线性关系的Newton流体.由对称性及应力矩

阵$(\hat{\sigma}_{ij})$在线性变换和刚体旋转下的不变性知，对Newton流体

$$\hat{\sigma}_{ij}=\mu\hat{e}_{ij}+\lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{v} \qquad (i,j=1,2,3), \tag{5.14}$$

μ、λ称为流体的粘性系数．

把(5.12)—(5.14)代入运动方程组(4.4)，并考虑到：当流体不可压时的连续性方程(5.3)，立即得到

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu\nabla\hat{\boldsymbol{e}} \ . \tag{5.15}$$

因为向量$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{e}}$的第一个分量为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_{i1}&=2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\\&=\Delta v_1+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\\&=\Delta v_1+\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\\&=\Delta v_1 \ .\end{aligned}$$

同理

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_{i2}=\Delta v_2,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_{i3}=\Delta v_3 \ .$$

将它们代入(5.15)式，得到不可压粘性流体的运动方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{5.16}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}-\nabla p+\mu\Delta\boldsymbol{v} \ . \tag{5.17}$$

这是一个包含四个未知数p、$\boldsymbol{v}$和四个方程式的封闭方程组．人们称(5.16)、(5.17)为Navier－Stokes方程组．

特款 1 若流动是定常的(即$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=0$)，并假定速度$\boldsymbol{v}$充分小，因此可以忽略非线性的高阶小量$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$，方程(5.17)可简化为

$$-\mu\Delta \boldsymbol{v}+\nabla p=\boldsymbol{F}. \tag{5.18}$$

方程组(5.16)、(5.18)称为Stokes方程组.

为了确定(5.16)、(5.18)的解，添加边界条件，例如

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{0}. \tag{5.19}$$

定理 1 定解问题(5.16)、(5.18)、(5.19)等价于变分形式：求 $\boldsymbol{v}\in V=\{\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\quad \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=0\}$，使得

$$\mu\iiint_{\Omega}\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{w}\mathrm{d}x=\iiint_{\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x,\qquad \forall\boldsymbol{w}\in V, \tag{5.20}$$

其中

$$\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{w}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial x_i}.$$

为了证明这个结论，我们需要以下的引理.

引理6 (De Rham引理) 设Ω是有界单连通开区域，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}\quad(x=(x_1,x_2,x_3))$，则存在函数$p$，使得

$$\boldsymbol{f}=\nabla p \tag{5.21}$$

的充分必要条件是

$$\iiint_{\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x=0,\qquad\forall\boldsymbol{w}\in V. \tag{5.22}$$

(请注意：为了避免引进更多的数学概念，如广义函数空间、Sobolev空间等，在这里我们有意回避了对函数$\boldsymbol{f}$，p、$\boldsymbol{w}$的属性要求，因此以下的证明不能说是严格的，但它交待了证明的主要思路.)

证明 **必要性** 由Green公式，对任意$\boldsymbol{w}\in V$，有

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x&=\iiint_{\Omega}\nabla p\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{3}\iiint_{\Omega}\frac{\partial p}{\partial x_i}w_i\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{3}\iint_{\partial\Omega}pw_i\cos(n,x_i)\mathrm{d}s-\iiint_{\Omega}p(\nabla\cdot\boldsymbol{w})\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由$\boldsymbol{w}\in V$，$\boldsymbol{w}|_{\partial\Omega}=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0$，从而(5.22)式成立.

充分性　设$\boldsymbol{g}=\{g_1(x),g_2(x),g_3(x)\}$，其中$g_i(x)$是任意属于$C_0^\infty(\Omega)$的函数，令

$$\boldsymbol{w}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}\ ,$$

易见$\boldsymbol{w}|_{\partial\Omega}=0$，又由$\nabla\cdot\boldsymbol{w}=\nabla\cdot\mathrm{rot}\ \boldsymbol{g}=0$，因此这样定义的$\boldsymbol{w}$必属于$V$.

在(5.22)中，取$\boldsymbol{v}=\mathrm{rot}\ \boldsymbol{g}$代入，并利用Green公式

$$\iiint_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}x=-\iiint_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}x=0\ .$$

由于$C_0^\infty(\Omega)$在$L_2(\Omega)$中稠密，因此由$g_i(x)$ $(i=1,2,3)$的任意性，亦即$\boldsymbol{g}$的任意性，立即得到：在Ω内

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}\ .$$

由于Ω是单连通区域，因此由Stokes定理：存在p使得

$$\boldsymbol{f}=\nabla p,$$

即(5.21)式成立.引理证毕.

利用De Rham引理，我们来完成定理1的证明.

定理1的证明　若$\boldsymbol{v}$，p是定解问题(5.16)、(5.18)、(5.19)的解，则$\boldsymbol{v}\in V$.用$\boldsymbol{w}\in V$乘方程(5.18)两端，在Ω上求积分得

$$-\mu\iiint_\Omega \Delta\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}\mathrm{d}x+\iiint_\Omega \nabla p\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x=\iiint_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x.$$

由De Rham引理的必要性论断，上述等式左端第二项为零，对第一项用Green公式，注意到$\boldsymbol{w}|_{\partial\Omega}=0$，立即得到(5.20).

反之，若$\boldsymbol{v}\in V$是(5.20)的解，且充分光滑.那么由Green公式推得

$$\iiint_\Omega (-\Delta\ \boldsymbol{v}-\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x=0\ ,\qquad \forall\,\boldsymbol{w}\in V.$$

由De Rham引理的充分性结论，存在$-p$，使得

$$-\Delta\boldsymbol{v}-\boldsymbol{F}=-\nabla p.$$

因此 v、p适合方程组(5.18)，至于适合(5.16)、(5.19)则由 $v\in V$直接推出.

式(5.20)称为Stokes方程组的弱形式(或变分形式)，把它与通常Poisson方程的Dirichlet问题的弱形式相比是有启发的：作为Stokes方程组，v的每一个分量与Poisson方程的解适合同样的双线性形式，所不同的只是在允许函数类V的定义中多加了一个约束条件 $\nabla\cdot v=0$.

弱形式(5.20)的一个重要特点在于：把求解v和p的过程分离了，把求解 v的过程纳入了一个与椭圆方程(组)完全一致的变分框架来处理，这无疑是十分有利的.例如，有限元方法就可以被考虑用来求解Stokes方程组.

特款2 在二维情形，在特款1的假设下，Stokes方程组可以通过引进流函数的办法来求解.

方程(5.16)，即

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}(-v_2)=0\ .$$

因此由Stokes定理，当Ω为单连通区域时，存在单值可微函数$\psi(x_1,x_2)$，使得

$$\begin{aligned} v_1&=-\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\\ v_2&=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

ψ称为流函数.而由方程组(5.18)

$$-\mu\Delta v_1+\frac{\partial p}{\partial x_1}=F_1\ ,$$

$$-\mu\Delta v_2+\frac{\partial p}{\partial x_2}=F_2\ .$$

其中$F=\{F_1,F_2\}$.把上述两个方程分别对x_2和x_1求微商，然后相减得

$$-\mu\Delta\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}.$$

把(5.23)代入,得

$$\mu\Delta^2\psi=\widetilde{F}, \tag{5.24}$$

其中$\widetilde{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}$.即流函数$\psi$适合双调和方程(5.24).为了确定这个解,我们需要在区域Ω的边界$\partial\Omega$上加两个条件.以固壁边界为例,由$v|_{\partial\Omega}=0$,故在$\partial\Omega$上

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=0,$$

即

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{5.25}$$

以及$\left.\frac{\partial\psi}{\partial s}\right|_{\partial\Omega}=0$($s$为$\partial\Omega$的弧长参数),故$\psi|_{\partial\Omega}=$常数.不妨假设此常数为零.故有

$$\psi|_{\partial\Omega}=0. \tag{5.26}$$

从而对于具有固壁边界的不可压粘性流体的平面运动,流函数$\psi(x_1,x_2)$是边值问题(5.24)—(5.26)的解.

特款 3 若流动非定常,速度充分小,那么在忽略高阶小量后,Navier–Stokes方程组(5.16)、(5.17)简化为

$$\nabla\cdot v=0,$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}-\mu\Delta v+\nabla p=F.$$

对这个方程组考虑混合问题:

$$v(x_1,x_2,x_3,0)=v_0(x_1,x_2,x_3),\qquad x\in\Omega,$$

$$v|_{\partial\Omega}=0.$$

同样我们可以建立上述定解问题的弱形式:

求$v(x,t)$,使得

i) 对固定t,作为x的函数,$v\in V$;

ii) 对任意$w\in V$，有

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega} v\cdot w dx+\mu\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\nabla v_i\cdot\nabla w_i dx=\iiint_{\Omega} F\cdot w dx;$$

iii) $v(x,0)=v_0(x)$.

从而可以把它纳入变分方法的框架去求它的近似解.

5.3 可压缩理想气体运动方程组

由理想流体的假定，忽略粘性和热传导，故

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,3),$$

$$q=0,\quad Q=0\ .$$

从而由(4.1)、(4.4)、(4.9)立即得到

$$\frac{d\rho}{dt}+(\nabla\cdot v)\rho=0, \tag{5.27}$$

$$\frac{d v}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{1}{\rho}F, \tag{5.28}$$

$$\frac{de}{dt}=-\frac{p}{\rho}(\nabla\cdot v). \tag{5.29}$$

这个方程组并不封闭，它有六个未知函数e、p、ρ、v，但只有五个方程.为此我们要增加一个状态方程.

假设所考虑的流体是完全气体

$$p=R\rho T \tag{5.30}$$

R是气体常数，T是热力学温度，式(5.30)称为状态方程.

对大多数气体来说

$$e=c_V T, \tag{5.31}$$

c_V是定容比热. 显然(5.27)—(5.31)构成一个封闭方程组.下面我们对它作进一步简化.

忽略热传导的完全气体称为理想气体.对于理想气体能量方程(5.29)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}.$$

考虑到(5.30)、(5.31),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_V T)-\frac{RT}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0.$$

令$\hat{r}=\frac{1}{\rho}$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_V\ln T+R\ln\hat{r})=0.$$

记

$$S=c_V\ln T+R\ln\hat{r}+S_0, \tag{5.32}$$

S_0对于每个运动着流体质点是常数,从而能量方程(5.29)可简化为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0. \tag{5.33}$$

S称为熵.式(5.33)表示对于理想气体每个流体质点在运动过程中,熵是不变的.即理想气体的可压缩流必是等熵流.

在引入了熵函数以后,状态方程(5.30)可改写为

$$\begin{aligned} p&=R\rho^{1+\frac{R}{c_V}}\mathrm{e}^{\frac{S-S_0}{c_V}} \\ &=C(S,S_0)\rho^{\gamma}, \end{aligned} \tag{5.34}$$

其中

$$\gamma=1+\frac{R}{c_V},$$

$$C(S,S_0)=R\mathrm{e}^{\frac{S-S_0}{c_V}},\qquad C(S_0,S_0)=R.$$

γ称为气体常数.$1<\gamma\leqslant\frac{5}{3}$.对空气而言,$\gamma=1.4$.

对于理想气体,由(5.33),得$S=S_0$.故由(5.34)得状态方程

$$p=R\rho^{\gamma}. \tag{5.35}$$

把(5.35)代入(5.28),得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{R\gamma}{\gamma-1}\nabla\rho^{\gamma-1}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{F}. \tag{5.36}$$

(5.27) 与 (5.36) 构成了可压缩理想气体的运动方程组，它是一个包含四个未知函数ρ、$\boldsymbol{v}$和四个方程的封闭方程组.

特款 1 声波方程

声波是小扰动在空气中的传播. 设在扰动发生前空气处于静止状态

$$p=p_0,\ \rho=\rho_0,\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}, \tag{5.37}$$

p_0, ρ_0是常数. 外力$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$. 空气受扰时的状态为

$$p=p_0+p_1,\ \rho=\rho_0+\rho_1,\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1 .$$

其中

$$\left|\frac{p_1}{p_0}\right|,\ \left|\frac{\rho_1}{\rho_0}\right|,\ |\boldsymbol{v}_1|\ll 1 . \tag{5.38}$$

将它们代入(5.27)、(5.36)得

$$\frac{\partial(\rho_0+\rho_1)}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla(\rho_1+\rho_0)+(\rho_1+\rho_0)\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1+\gamma R(\rho_1+\rho_0)^{\gamma-2}\nabla(\rho_1+\rho_0)=\boldsymbol{0} .$$

考虑到(5.37)、(5.38)，略去高阶小量，得

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\rho_0(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1)=0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t}+\gamma R\rho_0^{\gamma-2}\nabla\rho_1=\boldsymbol{0} .$$

将上述两个方程分别对t和x求微商，即对第一个方程作用$\frac{\partial}{\partial t}$，对第二个方程作用$\rho_0\nabla\cdot$ 然后相减得到

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}-\gamma R\rho_0^{\gamma-1}\Delta\rho_1=0 .$$

命$a^2=\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\rho=\rho_0}=\gamma R\rho_0^{\gamma-1}$，则上述方程有形式

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}-a^2\Delta\rho_1=0 . \tag{5.39}$$

即ρ_1是波动方程的解，a是声速.

对方程(5.39)可以提Cauchy问题和混合问题.以Cauchy问题为例，即在初始时刻需要给定

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1(x,0)=\rho_1^0(x),\\&\frac{\partial}{\partial t}\rho_1(x,0)=\rho_1^1(x)\ .\end{aligned}\right.\qquad \forall\, x\in\mathbf{R}^3$$

特款 2 一维不定常流.

考虑一根半无穷长管子(如图4-3)，一端有一活塞，它以速度$V(t)$作抽出运动，问管内气体的运动情况?

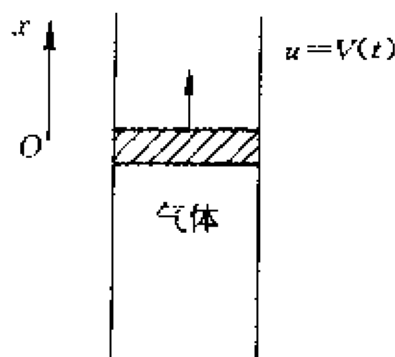


图 4-3

这是一个典型的一维不定常运动.由(5.27)、(5.36)($\boldsymbol{F}=\mathbf{0}$)，描写上述物理过程的数学模型是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0\ ,\tag{5.40}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+R\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0\ .\tag{5.41}$$

引进声速函数a:

$$a^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=R\gamma\rho^{\gamma-1}\ ,$$

即

$$\mathrm{d}\rho=\frac{2}{\gamma-1}\ \frac{\rho}{a}\ \mathrm{d}a\ .$$

利用这个微分等式，(5.40)、(5.41)可以简化为

$$\frac{2}{\gamma-1}\ \frac{\partial a}{\partial t}+\frac{2}{\gamma-1}\ v\frac{\partial a}{\partial x}+a\frac{\partial v}{\partial x}=0\ ,\tag{5.42}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2a}{\gamma-1}\ \frac{\partial a}{\partial x}=0\ .\tag{5.43}$$

把(5.42)、(5.43)两式相加，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v+\frac{2}{\gamma-1}a\right)+(v+a)\frac{\partial}{\partial x}\left(v+\frac{2}{\gamma-1}a\right)=0 .$$

把(5.42)、(5.43)两式相减，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v-\frac{2}{\gamma-1}a\right)+(v-a)\frac{\partial}{\partial x}\left(v-\frac{2}{\gamma-1}a\right)=0 .$$

由一阶偏微分方程的特征理论知：方程组(5.42)、(5.43)存在两条特征线

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\pm a . \tag{5.44}$$

沿着这两条特征线

$$v\pm\frac{2}{\gamma-2}a=\text{常数} . \tag{5.45}$$

对于我们一开始给定的物理模型，在初始时刻

$$v(x,0)=0 , \tag{5.46}$$

$$a(x,0)=a_0 .$$

在边界$x=\int_0^t V(t)\mathrm{d}t$上

$$v=V(t) . \tag{5.47}$$

我们假设活塞的抽出速度不太大，例如

$$V(t)\leqslant\frac{2a_0}{\gamma-1} ,$$

那么我们可以用特征线法来求解，即利用特征线方程(5.44)以及给定在特征线上的特征关系式(5.45)去求得定解问题(5.42)、(5.43)、(5.46)、(5.47)的解的表达式.

5.4 渗流问题

渗流即流体通过多孔介质的流动，这是一个十分复杂的系统. 但对于大多数问题来说人们关心的只是流动的宏观性质，因此从微观上去研究流体在每个孔隙中的流动，一般来说既无必要也无

可能.在渗流力学这种从微观(个别孔隙中的流动)到宏观(连续体)的过渡是借助于引进孔隙度这个宏观物理量来实现的.

孔隙度作为点P的函数,理解为一个以P为质心的体积ΔV与其中孔隙的体积$\Delta V'$之比的极限

$$\phi(P)=\lim\frac{\Delta V'}{\Delta V}.$$

设ΔA为包含点P的截面积,流体通过ΔA的流量为Δq,则点P处流体平均速度的大小为

$$v^*_{\Delta A}=\frac{\Delta q}{\phi\,\Delta A}.$$

为了便于研究,人们通常考虑所谓"假想渗流",即假定流体充满着全部介质和孔隙所占有的空间,而通过任意截面的流量假定仍保持原来的实际流量不变.这样可以与通常流体力学一样定义速度v,这个速度我们称为渗流速度.因此对于固定截面来说(如不计极限过程),平均速度的大小v^*与渗流速度的大小v之间存在关系

$$\phi\, v^*=v.$$

利用假想渗流模型来导出渗流力学的基本运动方程,有以下三点必须注意:

1° 在每一微元$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$中,流体的质量是$\phi\,\rho\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$,即它只占有孔隙的体积.

2° 由于多孔介质的存在,流体在运动中受到很大阻力$\boldsymbol{F}_\mu$,它的大小与流体的粘性μ和流速$\boldsymbol{v}$成正比,而它的方向恰与流动方向相反,即

$$\boldsymbol{F}_\mu=-\frac{1}{k}\mu\,\boldsymbol{v}.\tag{5.48}$$

k是一个x的正函数,k愈大,阻力愈小,人们称它为渗流率,它只与介质有关.如果介质是均匀的、各向同性的,那么k是正常数.

3° 在流体的运动过程中,它的惯性力$\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$与阻力$\boldsymbol{F}_\mu$相比是一个小量,可以忽略不计.

根据以上三点，由质量守恒律和动量守恒律(类似于(4.1)、(4.4)的推导)即得

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v)=0, \tag{5.49}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{\sigma} +\boldsymbol{F}_r +\boldsymbol{F}_g =\mathbf{0}, \tag{5.50}$$

这里$\boldsymbol{F}_g$为重力;取$\boldsymbol{e}_3$向上，则

$$\boldsymbol{F}_g = -\rho g \boldsymbol{e}_3 \tag{5.51}$$

将(5.51)、(5.48)代入方程(5.50)，并假定

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} ,$$

p是压力，那么(5.50)转化为

$$-\nabla p-\rho g \boldsymbol{e}_3 -\frac{1}{k}\mu v=\mathbf{0},$$

即

$$v=-\frac{k}{\mu}\left[\nabla p+\rho g \boldsymbol{e}_3 \right] . \tag{5.52}$$

这个表达式称为Darcy定律.它在渗流力学研究中起着十分重要的作用.

把(5.52)代入连续性方程(5.49)，得

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}-\nabla\cdot\left(\frac{k}{\mu}\rho \left[\nabla p+\rho g \boldsymbol{e}_3 \right] \right)=0 . \tag{5.53}$$

这个方程包括两个未知函数ρ、p，它并不封闭，为此需要根据所考虑问题的不同特性，增加一个状态方程，使它封闭.

特款 1 流体不可压.即假定流体是刚性的，$\rho=$常数，那么由(5.53)式，得

$$-\nabla\cdot(k\nabla p)=0. \tag{5.54}$$

若$k=$常数，即得

$$-\Delta p=0.$$

因此它是一个椭圆型方程.为了确定这个解，我们需要附加边界条件

$$p|_{\partial\Omega}=p_0 \qquad (\text{供水情形}), \tag{5.55$'$}$$

或

$$v\cdot n|_{\partial\Omega}=0 \qquad (封闭情形),$$

即

$$\left[\frac{\partial p}{\partial n}+\rho g\cos(n,z)\right]\bigg|_{\partial\Omega}=0. \tag{5.55)''$$

若流动是水平的，则可以忽略重力的影响，把它看成是一个二维问题来处理，此时封闭情形的边界条件将简化为

$$\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=0. \tag{5.55)'''$$

特款 2 假定流体可压缩，但压缩系数为常数c，即状态方程$\rho=\rho(p)$，它适合

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=c\mathrm{d}p. \tag{5.56}$$

利用(5.56)，方程(5.53)化为

$$c\mu\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}-\nabla\cdot(k\nabla\rho)-cg\frac{\partial}{\partial g}(k\rho^2)=0. \tag{5.57}$$

这是一个抛物型方程．若忽略重力影响，考虑平面流动，又k为常数，那么(5.57)可简化为热传导方程

$$a^2\frac{\partial\rho}{\partial t}-\Delta\rho=0, \tag{5.58}$$

其中

$$a^2=\frac{c\mu\phi}{k}.$$

由于在实用上，度量压力p比度量密度ρ要方便得多，因此人们乐于采用压力p作为未知函数．以方程(5.57)为例，考虑到状态方程(5.56)，从而有

$$a^2\frac{\partial p}{\partial t}-\Delta p-c|\nabla p|^2=0.$$

因为$c\ll1$，可以认为上式左端第二项要比第三项大得多，故略去

第二项，得

$$a^2\frac{\partial p}{\partial t}-\Delta p=0, \tag{5.59}$$

即p同样适合热传导方程.

对于(5.59)除了需要附加边界条件(5.55)′或(5.55)″外，还要给定初始条件

$$p(x,0)=p_0(x),\qquad x\in\Omega.$$

特款 3 气体渗流.

完全气体的状态方程由Boyle和Gay－Lussac定律给出:

$$p=R\rho T.$$

假若过程是等温的，则我们有状态方程

$$p=\alpha\rho\qquad(\alpha=RT). \tag{5.60}$$

将它代入(5.53)式，假设k＝常数，即得

$$a^2\frac{\partial p}{\partial t}-\Delta p^2+bp\frac{\partial p}{\partial z}=0, \tag{5.61}$$

其中$a^2=\dfrac{2\mu\phi}{k}$，$b=-\dfrac{4g}{\alpha}$.如果忽略重力影响，考虑平面问题，则有

$$a^2\frac{\partial p}{\partial t}-\Delta p^2=0. \tag{5.61$'$}$$

方程(5.61)和(5.61)′都是拟线性蜕化抛物型方程.它与通常抛物型方程一样，可以提Cauchy问题和混合问题.

在一般情形，状态方程(5.60)可改变为

$$p=\alpha\rho^{\gamma}\qquad(1\leqslant\gamma<\infty).$$

这样，相应的气体渗流的平面问题有形式

$$\frac{\partial p}{\partial t}-a_0^2\Delta\rho^{\gamma+1}=0. \tag{5.62}$$

在数学上，人们通常把方程(5.61)、(5.61)′和(5.62)称为渗流方程.

5.5 热传导问题

从5.2段知道粘性流体的速度$\boldsymbol{v}$和压力p适合Navier－Stokes方程(5.16)、(5.17)，由于对于Newton流体

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\hat{e}_{ij} + \lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

($\hat{e}_{ij}$的定义见(5.13))，因此考虑到连续性方程(5.16)以后，能量方程(4.9)中的项$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}$可以改写为

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} = \sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mu\sum_{i,j=1}^{3}\hat{e}_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\hat{e}_{ij}^2$$

$$= \frac{\mu}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

将它代入能量方程(4.9)，得

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \frac{\mu}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 + Q. \tag{5.63}$$

由于在这里$\boldsymbol{v}$是由Navier－Stokes方程解出的，因此可以认为是已知的.但方程(5.63)中e、$\boldsymbol{q}$都是未知量.因此它仍然不是封闭的.

根据Fourier定律

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T. \tag{5.64}$$

这里k是热传导系数，T是温度.而由热力学定律

$$e = c_V T. \tag{5.65}$$

c_V是定容比热.把(5.64)、(5.65)代入(5.63)得粘性流体的能量方程

$$\rho c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)T\right) = \nabla\cdot(k\nabla T) + \frac{\mu}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 + Q. \tag{5.66}$$

这里$\rho c_V(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)T$称为对流项，$\nabla\cdot(k\nabla T)$称为热传导项(扩散项)，$\frac{\mu}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2$称为粘性耗散项，$Q$是热源(汇)强度.

(5.66)是一个以温度T为未知函数的抛物型方程.为了确定这个解，我们需要给定初始条件

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_0(x_1, x_2, x_3)$$

和边界条件

$$T|_{\partial\Omega}=\varphi(x_1,x_2,x_3,t),\qquad 0<t\leqslant T.$$

或

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}+\varkappa T\right)\Big|_{\partial\Omega}=\varphi(x_1,x_2,x_3,t),\quad 0<t\leqslant T.$$

$\boldsymbol{n}$为$\partial\boldsymbol{\Omega}$的外法向，$\varkappa\geqslant 0$.

特款 1 若$\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$，由(5.66)得到通常的热传导方程

$$\rho c_V\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\cdot(k\nabla T)+Q. \tag{5.67}$$

若在长时间以后，热传导过程趋于稳定，即$\frac{\partial T}{\partial t}=0$，从而由(5.67)得到定常热传导方程

$$-\nabla\cdot(k\nabla T)=Q.$$

这是一个椭圆型方程，对它只需给边界条件.

特款 2 考虑一根埋在地下的很长的圆形管道，流体在管道内顺着管长方向(z方向)以等速度v_0流动，假设管道四周受热情况相同，问流体的温度如何变化?

这是一个轴对称问题.假设流体的导热系数k是常数.那么由(5.66)知，温度T适合方程

$$c_V\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_0\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

若当时间充分长以后，热传导趋于稳定，则T适合椭圆型方程

$$c_V\rho v_0\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \tag{5.68}$$

由于管长L比管径R大得多，为了进一步简化上述方程，把方程(5.68)规范化，引进无量纲长度

$$\underline{r}=\frac{r}{R}\quad 和\quad \underline{z}=\frac{z}{L}.$$

从而方程(5.68)可改写为

$$c_V\rho v_0\frac{\partial T}{\partial z}=k\left[\frac{L}{R^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{L}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right].$$

因为

$$\frac{L}{R^2}\gg\frac{1}{L},$$

这表示：从热传导性能上来说，r方向比z方向要大得多，因此相比之下可略去在z方向的热传导，从而方程(5.68)可简化为

$$c_V\rho v_0\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

这是一个抛物型方程，对它除了需要在$r=R$上给定边界条件外，只需在管道的一端$z=0$处给定条件

$$T(r,0)=\psi(r),\qquad 0\leqslant r\leqslant R,$$

则管道内流体的稳定温度场就被确定了.

5.6 激波和相变

在上面各节所建立的模型中，我们总假定所有未知函数都是充分光滑的.但从物理上讲，在某些情况下，这种假定是不对的.以5.3段特款2的一维不定常流为例，假如半无穷长管子一端的活塞不是作抽出运动，而是在相反方向作压缩运动，那么管内的气体运动必产生冲激波，从波前到波后，压力p、密度ρ和速度v产生间断.显然，这种冲激波的存在破坏了作为未知函数p、ρ、v的连续性假设.此外对于热传导问题，如果由于温度的变化使物体发生相变，例如从水变成冰，从钢水变成钢锭等，则在相变过程中物体吸收(或放出)潜热.因此，在相截面两侧，热流密度即温度的梯度∇T不可能是连续的，这样也就破坏了在热传导方程中作为未知函数的温度T的连续、可微性.但是在任何情形下，守恒律作为物体运动的普遍规律必须遵循.

以一维可压缩气体不定常运动为例，描写这个运动的方程组由(5.27)—(5.29)给出，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+v\frac{\partial e}{\partial x}\right)+p\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

回顾这些方程的推导过程(参见(4.4)、(4.9)的推导)，可以知道由守恒律推得的它们的原始形式是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0, \tag{5.69}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2+p)=0, \tag{5.70}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho v^2)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho ev+\frac{1}{2}\rho v^3+pv)=0. \tag{5.71}$$

它们是下面散度形式的偏微分方程在$n=1$时的特例.

所谓一般的散度形式的偏微分方程是指以下形式:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}=F, \tag{5.72}$$

这里P、P_i $(i=1,2,\cdots,n)$及F都是由自变量和未知函数组成的函数式.利用Green公式，我们可以写出它的弱形式.

设Ω是$t-x$空间的区域，$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，则在方程(5.72)两边乘以$\varphi$，并在$\Omega$上求积分，那么由Green公式即得

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}P_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iiint\limits_{\Omega}F\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{5.73}$$

按照通常的定义，我们可以把积分恒等式(5.73)称为方程(5.72)的弱形式.把对于任意$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$适合(5.73)的解称为方程(5.72)的弱解.

容易知道，若P、P_i $(i=1,2,\cdots,n)$、F在Ω内连续可微，那么(5.72)与(5.73)是等价的.如果它们在Ω内存在间断，人们自然要问：从(5.73)式可以获得什么新的信息?

引理 7 设$\Gamma\subset\Omega$是一条光滑曲线，P、P_i $(i=1,2,\cdots,n)$以及F在$\Omega\setminus\Gamma$内连续可微，在Γ两侧存在左右极限，则在$\Omega\setminus\Gamma$内，方程(5.72)成立，而在Γ上有

$$[P]\cos(n,t)+\sum_{i=1}^{n}[P_i]\cos(n,x_i)=0,\tag{5.74}$$

其中$[P]=P_+-P_-$为P在Γ上的左、右极限之差，n为Γ的法线方向.

证明 由(5.73)及φ的任意性，可知在$\Omega\setminus\Gamma$内(5.72)成立.下面证明(5.74)式.

设$P_0\in\Gamma$，作以P_0为心的小球$B\subset\Omega$，于是Γ把B分成两部分B_+和B_-.在(5.73)中取$\varphi\in C_0^\infty(B)$，则

$$\begin{aligned}&\iiint\!\!\int_{B_+}\left[(P\varphi)_t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(P_i\varphi)}{\partial x_i}-\varphi\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}\right)+F\varphi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\iiint\!\!\int_{B_-}\left[(P\varphi)_t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(P_i\varphi)}{\partial x_i}-\varphi\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}\right)+F\varphi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=0.\end{aligned}$$

利用Green公式及(5.72)得到

$$\begin{aligned}&\iint_{\Gamma}\left[(P_+-P_-)\cos(n,t)+\sum_{i=1}^{n}(P_{i+}-P_{i-})\cos(n,x_i)\right]\varphi\mathrm{d}s\\&=0.\end{aligned}$$

由φ的任意性知(5.74)成立.引理证毕.

例 1 激波.

正如前所述，在某些情况下，气体在运动中各有关量(速度、压力、密度等)的连续性会遭受破坏，且这种破坏是发生在某些曲线(或曲面)上.所论的量通过曲线(或曲面)前后都有跃变，这曲线(曲面)称为间断线(面).没有物质流通过的间断线(面)称为切向间断，有物质流通过的间断线(面)称为激波(shock wave).

A. Hopf 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2)=0,\tag{5.75}$$

其弱形式为

$$\iint_{\Omega}(u\varphi_t+\frac{1}{2}u^2\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\quad \forall \varphi\in C_0^\infty(\boldsymbol{\Omega}).\tag{5.76}$$

若Γ为u的间断线，由引理7知在Γ上

$$[u]\cos(n,t)+\frac{1}{2}[u^2]\cos(n,x)=0.\tag{5.77}$$

若Γ: $x=h(t)$，则在Γ上

$$h'(t)=\frac{1}{2}(u_++u_-).\tag{5.78}$$

上式表明，弱解的间断不能是随意的，间断线的斜率与解在间断线两侧的极限值必须满足关系式(5.78)，我们称它为间断条件或者Rankine－Hugoniot关系式. 它在物理上的含义是：在间断线上对这个物理过程起制约作用的守恒律依然正确.

B. 一般情形. 回到(5.69)—(5.71)式，若Γ: $x=h(t)$为间断线，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0, & \boldsymbol{\Omega}\setminus\Gamma,\\ [\rho]\,h'(t)-[\rho v]=0, & \Gamma;\end{cases}\tag{5.69$'$}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v^2+p)=0, & \boldsymbol{\Omega}\setminus\Gamma,\\ [\rho v]\,h'(t)-[\rho v^2+p]=0, & \Gamma;\end{cases}\tag{5.70$'$}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho e+\dfrac{1}{2}\rho v^2)+\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho ev+\dfrac{1}{2}\rho v^3+pv)=0, & \boldsymbol{\Omega}\setminus\Gamma,\\ [\rho e+\dfrac{1}{2}\rho v^2]\,h'(t)-[\rho ev+\dfrac{1}{2}\rho v^3+pv]=0, & \Gamma.\end{cases}\tag{5.71$'$}$$

例 2 相变.

大家知道，在无源汇的情况下，物体内热量的传递引起内能(焓)的变化，但它永远符合守恒律：

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\nabla q=0, \tag{5.79}$$

其中e是焓,q为热流密度.由Fourier实验定律

$$q=-\nabla u.$$

u为温度,为简单计,假设热传导系数$k=1$;焓与温度的关系是

$$e=u+L\cdot H(u),$$

L为潜热,$H(u)$为Heaviside函数,即

$$H(u)=\begin{cases}1, & u>0,\\ [0,1], & u=0,\\ 0, & u<0.\end{cases}$$

由于e是u的间断函数,因此适合方程(5.79),是指函数e,u在积分意义下满足等式:

$$\iiint_Q (e\varphi_t-\nabla u\cdot\nabla\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=0, \qquad \varphi\in C_0^\infty(Q), \tag{5.80}$$

其中$Q=\Omega\times[0,T]$,Ω为平面区域.

(5.80)称为相变问题的弱形式.我们可以从弱形式出发去研究相变问题的可解性及其计算方法.

若u满足(5.80)及指定的初边值条件,则我们称u为相变问题的弱解.

设Q_1是水区,Q_2是冰区,Γ为相截面,u_1、u_2分别代表水温和冰温,且分别在Q_1、Q_2内光滑,在Γ两侧∇u_i $(i=1,2)$分别存在左右极限,若u为相变问题的弱解,则在Q_i内

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\Delta u_i=0,$$

而在Γ上,由引理7知

$$\begin{aligned}&[e(u_1)-e(u_2)]\cos(n,t)\\ &=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\cos(n,x)+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\cos(n,y).\end{aligned}$$

设$\Gamma: t=\phi(x,y)$,则

$$n=\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}}\left\{1,-\frac{\partial\phi}{\partial x},-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right\}.$$

代入上式，则在Γ上

$$-\nabla u_1\cdot\nabla\phi+\nabla u_2\cdot\nabla\phi=L. \tag{5.81}$$

又在Γ上显然有

$$u_1-u_2=0. \tag{5.82}$$

这类冰水相变问题称为Stefan问题，(5.81)称为Stefan条件，它的一维形式是Stefan在1889年首先提出来的. 相截面Γ称为自由边界，(5.81)和(5.82)称为自由边界条件.

§6. 相容性定律和数学模型 (固体情形)

6.1 弹性体的平衡与振动

在小形变$|\boldsymbol{v}|$、$|\nabla\boldsymbol{v}|\ll 1$的假设下

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2},$$

$\boldsymbol{u}$是位移，从而运动方程组为

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{F}. \tag{6.1}$$

这里$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$可改写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{i1}\\ \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{i2}\\ \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{i3}\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}
$$

$$
= \partial^{T} \hat{\boldsymbol{\sigma}}.
$$

这里∂是6×3微分算子矩阵(见(2.13))，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$是6×1矩阵

$$
\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} \tag{6.2}
$$

于是运动(振动)方程组(6.1)可改写为

$$
\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \partial^{T} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{F}. \tag{6.3}
$$

为了建立$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$与$\boldsymbol{u}$的关系，我们建立应力—应变关系.

在一维情形，大家知道一根受拉(压)的弹性杆的每个截面上的应力—应变关系是由Hooke定律给出的，即

$$
\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma.
$$

这里E是Young 氏模量.

在多维情形，情况稍为复杂些，因为弹性体的纵向拉伸同时引起横向(侧向)收缩.根据这个道理

$$
\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}),
$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}(-\nu\sigma_{11}+\sigma_{22}-\nu\sigma_{33}), \tag{6.4}$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}(-\nu\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}+\sigma_{33}),$$

这里$0<\nu<\frac{1}{2}$，称为Poisson比，它在物理上表示：纵向拉伸形变和由此引起的横向的收缩形变的比值.

此外由弹性理论知，对剪应力—剪应变有关系

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{G}\sigma_{ij} \qquad (i,j=1,2,3; \quad i\neq j), \tag{6.5}$$

G称为剪切模量，

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{6.6}$$

从方程(6.4)、(6.5)中解出σ_{ij} $(i,j=1,2,3)$，我们有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\hat{\boldsymbol{D}}\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{6.7}$$

其中$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$的定义见§2的2.4段.

$$\hat{\boldsymbol{D}}=\begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & & \mathbf{0} & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & & & \\ & & & G & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & G & 0 \\ & & & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \tag{6.8}$$

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{6.9}$$

当$0<\nu<\frac{1}{2}$时，矩阵$\hat{\boldsymbol{D}}$是对称正定阵.

把(6.8)与(2.12)结合在一起，得到应力—位移关系式：

$$\hat{\sigma}=\hat{\boldsymbol{D}}\,\partial\,\boldsymbol{u}.$$

将它代入方程(6.3),即得弹性振动方程组

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \boldsymbol{\partial}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{D}}\, \hat{\boldsymbol{\partial}} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}. \tag{6.10}$$

为了确定这个解,我们需要在$\partial \boldsymbol{\Omega}$上给定边界条件

$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \varphi \qquad (\text{位移边界条件}), \tag{6.11}$$

或由(3.1)

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{P} \qquad (\text{应力边界条件}),$$

即

$$\boldsymbol{\partial}_n^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{D}}\, \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{P}. \tag{6.12}$$

其中$\boldsymbol{\partial}_n$为6×3矩阵,它是由微分算子矩阵$\boldsymbol{\partial}$把元素$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}$换成$\cos(n, x_i)$得到的,即

$$\boldsymbol{\partial}_n = \begin{bmatrix} \cos(n,x_1) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(n,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n,x_3) \\ \cos(n,x_2) & \cos(n,x_1) & 0 \\ 0 & \cos(n,x_3) & \cos(n,x_2) \\ \cos(n,x_3) & 0 & \cos(n,x_1) \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

并在$t=0$时刻给定初始条件

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0(x), \qquad x \in \boldsymbol{\Omega},$$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \boldsymbol{u}_1(x), \qquad x \in \boldsymbol{\Omega}.$$

若弹性体达到平衡态,即惯性力为零,

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = 0,$$

则弹性体的平衡方程组为

$$-\boldsymbol{\partial}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{D}}\, \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \qquad \text{在}\boldsymbol{\Omega}\text{内}. \tag{6.14}$$

在$\partial \boldsymbol{\Omega}$上适合形似(6.11)或(6.12)的边界条件.

以下我们建立(6.14)的弱形式(即变分形式).

考虑一个四周固定的弹性体，在外力(体力)作用下的平衡问题.此时位移函数$\boldsymbol{u}(x)$适合方程组(6.14)和边界条件(6.11)(其中$\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{0}$).

设W是一个向量函数集合

$$W=\{\boldsymbol{w}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}\}.$$

以$\boldsymbol{w}\in W$点乘方程(6.14)两端，并在$\boldsymbol{\Omega}$上求积分，注意到Green表达式

$$-\iiint_{\Omega}(\partial^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{D}}\,\partial\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x$$

$$=\iiint_{\Omega}(\partial\boldsymbol{w})^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{D}}(\partial\boldsymbol{u})\mathrm{d}x-\iint_{\partial\Omega}(\partial_n\boldsymbol{w})^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{D}}(\partial_n\boldsymbol{u})\mathrm{d}s,\qquad(6.15)$$

其中∂_n的定义见(6.13).由于$\boldsymbol{w}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}$，从而由方程组(6.14)即得

$$\iiint_{\Omega}(\partial\boldsymbol{w})^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{D}}(\partial\boldsymbol{u})\mathrm{d}x=\iiint_{\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x.\qquad(6.16)$$

因此边值问题(6.14)、(6.11)($\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{0}$)的弱形式是:

求$\boldsymbol{u}\in W$，使得对于任意$\boldsymbol{w}\in W$积分等式(6.16)成立.

同理，我们利用Green公式(6.15)可以写出边值问题(6.14)、(6.12)的弱形式.

任何弹性体都是空间物体，作用在它上面的各种外力一般都是空间力系.因此，严格地说，所有弹性体的变形问题都是空间问题.但是，如果弹性体具有特殊形状，承受的外力亦有特定的分布，那么一般来说，就有可能把空间问题近似地看成平面问题来处理.显然这样做将大大简化我们的计算量.以下我们介绍三种简化模型：平面应力问题、平面应变问题和板的弯曲问题.

6.2 平面应力和平面应变问题

一、平面应力问题.

几何特点：弹性体是一块很薄的墙体，即厚度相对于长

和宽要小得多.

物理特点：所有作用于这墙体的外力都平行于墙体平面，且在厚度方向是均匀分布的.

设$\boldsymbol{e}_3$表示墙体的厚度方向，厚度为h，中面是$x_3=0$. 根据假设在墙体的表面$x_3=\pm\frac{h}{2}$不受外力.故在$x_3=\pm\frac{h}{2}$上

$$\sigma_{33}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0. \tag{6.17}$$

由于墙很薄，因此可以认为在墙体内的所有点上，上式成立.因而在墙体内部只有平行于x_1x_2平面的三个应力分量σ_{11}、σ_{22}、σ_{12}不为零，即墙体内部的应力只发生在平行于墙体表面的平面内，我们称它为平面应力问题.

由于墙很薄，我们同时可以认为σ_{11}、σ_{12}、σ_{22}以及所有的应变和位移分量是不随厚度变化的，即这些量只是x_1、x_2的函数，而与x_3无关.

从而由Hooke定律(6.4)、(6.5)以及(6.17)得

$$\begin{gathered}\gamma_{13}=\gamma_{23}=0,\\ \varepsilon_3=\frac{1}{E}(-\nu\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}),\end{gathered} \tag{6.18}$$

以及

$$\begin{gathered}\varepsilon_1=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}),\\ \varepsilon_2=\frac{1}{E}(-\nu\sigma_{11}+\sigma_{22}),\\ \gamma_{12}=\frac{1}{G}\sigma_{12}.\end{gathered} \tag{6.19}$$

关系式(6.18)表示：对平面应力问题而言，弹性体在厚度方向有正应变，但它可通过应力σ_{11}、σ_{22}表出.

从(6.19)可以解出σ_{11}、σ_{22}、σ_{12}，得

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1+2G & \lambda_1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_1+2G & 0\\ 0 & 0 & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{bmatrix},$$

其中G为剪切模量(见(6.6)).

$$\lambda_1=\frac{Ev}{1-v^2}. \tag{6.20}$$

设$\boldsymbol{u}_0$是平面上位移向量,$\boldsymbol{u}_0=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2$,则由运动方程组(6.1)的前两个方程,得$\boldsymbol{u}_0$适合的方程组

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_0}{\partial t^2}=\boldsymbol{\partial}_0^T\boldsymbol{D}_{01}\boldsymbol{\partial}_0\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{F}_0. \tag{6.21}$$

这里$\boldsymbol{F}_0=f_1\boldsymbol{e}_1+f_2\boldsymbol{e}_2$,

$$\boldsymbol{\partial}_0=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}_{01}=\begin{bmatrix}\lambda_1+2G & \lambda_1 & 0\\ \lambda_1 & \lambda_1+2G & 0\\ 0 & 0 & G\end{bmatrix}.$$

对于平衡问题,由于$\rho\dfrac{\partial^2\boldsymbol{u}_0}{\partial t^2}=\boldsymbol{0}$,即得

$$-\boldsymbol{\partial}_0^T\boldsymbol{D}_{01}\boldsymbol{\partial}_0\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{F}_0. \tag{6.22}$$

在附加边界条件后,我们仍然可写出它的弱形式(即变分形式).

二、 平面应变问题.

几何特点: 弹性体是一个纵向等截面的无穷长坝体.

物理特点: 所有作用在弹性体上的外力与横断面(如坝断面)平行,且沿着纵向均匀分布.

设$\boldsymbol{e}_3$为纵轴方向,那么根据假设,应力矩阵、应变矩阵和位移向量的所有分量都与x_3无关,而只是x_1、x_2的函数.由于弹性体沿着纵向是无穷长的,因此任意一个横断面都是对称面,故$\boldsymbol{e}_3$方向的位

移$u_3=0$，且$u_1=u_1(x_1,x_2)$、$u_2=u_2(x_1,x_2)$. 即应变只产生在平面(横断面)内，故称为平面应变问题. 由应变—位移关系式(2.13)得

$$\varepsilon_3=0,\quad \gamma_{13}=0,\quad \gamma_{23}=0.$$

把它们代入Hooke定律(6.7)，得

$$\begin{aligned}&\sigma_{13}=\sigma_{23}=0,\\&\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\end{aligned}\tag{6.23}$$

和

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2G & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2G & 0\\ 0 & 0 & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{bmatrix},\tag{6.24}$$

其中λ的定义是(6.9). 而(6.23)式表示：对于平面应变问题，每个横断面上都受到一个垂直于横断面的正应力σ_{33}的作用，它的大小可以通过σ_{11}、σ_{22}表示.

从而与平面应力问题一样，对于平面应变问题，由运动方程组(6.1)的前两个方程和应力—应变关系式(6.24)，可以得到平面上的位移向量$\boldsymbol{u}_0$适合的方程组

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_0}{\partial t^2}=\boldsymbol{\partial}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{F}_0.\tag{6.25}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}\lambda+2G & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2G & 0\\ 0 & 0 & G\end{bmatrix}.$$

同样可以写出平面应变问题的平衡方程组和它的弱形式. 值得指出的一点是：在平面应力问题与平面应变问题中，除了弹性矩阵$\boldsymbol{D}_0$和$\boldsymbol{D}_1$中的元素$\bar{\lambda}$和λ有区别外，其他都是完全一样的.

6.3 板的弯曲问题

板的弯曲问题. 几何特点：与平面应力问题一样，弹性体是一

块很薄的平板，即厚度h相对于板的长和宽要小得多.

物理特点：平板的上下表面不受力，但它受到垂直于平板表面的外力(体力)的作用，使平板发生弯曲.它的挠度(即垂直方向的位移)远小于它的厚度尺寸(即假定是小挠度的).

取发生弯曲形变前的中面(平分板厚度的平面)为x_1x_2平面，$\boldsymbol{e}_3$垂直于板面.根据小挠度假设：故认为在中面上，在x_1、x_2方向上的位移为零，即

$$u_1(x_1,x_2,0)=u_2(x_1,x_2,0)=0.$$

从而由Taylor展式，在平板内部

$$\begin{aligned}u_1(x_1,x_2,x_3)&=x_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)+O(h^2),\\ u_2(x_1,x_2,x_3)&=x_3\frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)+O(h^2),\end{aligned}\tag{6.26}$$

而法向位移

$$\begin{aligned}u_3(x_1,x_2,x_3)=&u_3(x_1,x_2,0)+x_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)\\ &+\frac{x_3^2}{2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,0)+O(h^3).\end{aligned}\tag{6.27}$$

由于在平板的上下表面没有面力作用，故在$x_3=\pm\dfrac{1}{2}h$上

$$\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0.$$

利用Hooke定律(6.7)，得到在$x_3=\pm\dfrac{1}{2}h$上

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}=0,\\[2ex] (\lambda+2G)\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}+\lambda\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=0.\end{cases}\tag{6.28}$$

由(6.28)的前两个式子

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1,x_2,0)=O(h^2),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1,x_2,0)=O(h^2).$$

若令

$$w(x_1,x_2)=u_3(x_1,x_2,0),$$

则由(6.26),有

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2,x_3)&=-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}+O(h^2),\\ u_2(x_1,x_2,x_3)&=-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}+O(h^2). \end{aligned} \tag{6.29}$$

对于$u_3(x_1,x_2,x_3)$,由Taylor公式和(6.28)(6.29)我们有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)\\ &=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\left(x_1,x_2,\frac{h}{2}\right)+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\left(x_1,x_2,-\frac{h}{2}\right)\right]+O(h^2)\\ &=\frac{-\lambda}{2(\lambda+2G)}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_{x_3=\frac{h}{2}}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_{x_3=-\frac{h}{2}}\right]+O(h^2)\\ &=O(h^2). \end{aligned} \tag{6.30}$$

此外,因

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\left(x_1,x_2,\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)\pm\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,0)+O(h^2),$$

故由(6.28)、(6.29),得

$$\begin{aligned} h\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,0)&=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\left(x_1,x_2,\frac{h}{2}\right)-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\left(x_1,x_2,-\frac{h}{2}\right)+O(h^2)\\ &=\frac{-\lambda}{\lambda+2G}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_{x_3=\frac{h}{2}}-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_{x_3=-\frac{h}{2}}\right]+O(h^2)\\ &=-\frac{\lambda h}{\lambda+2G}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right]+O(h^2). \end{aligned} \tag{6.31}$$

把(6.30)、(6.31)代入(6.27)，得到

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)+x_3\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,0)+O(h^2)$$

$$=-\frac{\lambda x_3}{\lambda+2G}\Delta w+O(h^2). \tag{6.32}$$

因为$\frac{\lambda}{\lambda+2G}=\frac{\nu}{1-\nu}$，故由(6.29)、(6.32)，得

$$\varepsilon_1=-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+O(h^2),$$

$$\varepsilon_2=-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+O(h^2),$$

$$\varepsilon_3=\frac{\nu x_3}{1-\nu}\Delta w+O(h^2),$$

$$\gamma_{12}=-2x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+O(h^2),$$

$$\gamma_{23}=O(h^2),\qquad \gamma_{31}=O(h^2).$$

由Hooke定律(6.7)，得到

$$\sigma_{11}=(\lambda+2G)\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_3$$

$$=-x_3\left[(\lambda+2G)-\frac{\lambda^2}{\lambda+2G}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$$

$$-x_3\left[\lambda-\frac{\lambda^2}{\lambda+2G}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+O(h^2)$$

$$=-\frac{x_3 E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+O(h^2). \tag{6.33}$$

同理

$$\sigma_{22}=-\frac{x_3 E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+O(h^2),$$

$$\sigma_{12} = -\frac{x_3 E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + O(h^2), \tag{6.34}$$

$$\sigma_{13} = O(h^2), \qquad \sigma_{23} = O(h^2),$$

$$\sigma_{33} = O(h^2).$$

现考虑板的平衡方程，它作为三维弹性体必适合方程组(6.3)(这里$\rho \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=0$).根据假设，由于外力$\boldsymbol{F}=\{0,0,f\}$，故有形式

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \tag{6.35}$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \tag{6.36}$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f(x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{6.37}$$

在(6.35)、(6.36)两边同乘以x_3，并对x_3从$-\dfrac{h}{2}$到$\dfrac{h}{2}$积分，由于

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \mathrm{d}x_3 = x_3 \sigma_{i3} \Big|_{x_3=-\frac{h}{2}}^{x_3=\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} \mathrm{d}x_3$$

$$= -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} \mathrm{d}x_3 \qquad (i=1,2),$$

故有

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} \mathrm{d}x_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{11} \mathrm{d}x_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{12} \mathrm{d}x_3, \tag{6.38}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23} \mathrm{d}x_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{12} \mathrm{d}x_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{22} \mathrm{d}x_3. \tag{6.39}$$

对(6.37)式两边关于x_3从$-\dfrac{h}{2}$到$\dfrac{h}{2}$积分，由于$\sigma_{33}\big|_{x_3=\pm\frac{h}{2}}=0$，故有

$$
\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{13}\mathrm{d}x_3+\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{23}\mathrm{d}x_3
$$

$$
=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3\ . \tag{6.40}
$$

将(6.38)、(6.39)代入(6.40)，得

$$
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_3\sigma_{11}\mathrm{d}x_3+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_3\sigma_{12}\mathrm{d}x_3+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_3\sigma_{22}\mathrm{d}x_3
$$

$$
=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3. \tag{6.41}
$$

在(6.33)、(6.34)中略去高阶无穷小量，可知

$$
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_3\sigma_{11}\mathrm{d}x_3=-\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_3^2\mathrm{d}x_3
$$

$$
=-\frac{h^3E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).
$$

同理

$$
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_3\sigma_{12}\mathrm{d}x_3=-\frac{h^3E}{12(1+\nu)}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2},
$$

$$
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_3\sigma_{22}\mathrm{d}x_3=-\frac{h^3E}{12(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).
$$

将它们代入(6.41)，得

$$
-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}\right)-\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{2\nu}{1-\nu^2}+\frac{2}{1+\nu}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}
$$

$$
=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3,
$$

即

$$D\Delta^2 w = f_0(x_1, x_2), \tag{6.42}$$

其中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad f_0(x_1, x_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x_3.$$

方程(6.42)表明：对于板的弯曲问题(平衡情形)，在小挠度假设下，挠度w适合双调和方程(6.42)，在区域的边界上适合边界条件.例如若板的四边固定，则

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6.43}$$

除此以外，当然还有简支边界条件和自由边界条件等.

对于定解问题(6.42)、(6.43)，我们可以写出它的弱形式：求 $w \in W_0 = \left\{ w|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$，使得对任意$\zeta \in W_0$，有

$$a(w, \zeta) = (f_0, \zeta).$$

其中

$$a(w, \zeta) = D\iint_\Omega \Big[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \nu\Big(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2}\Big) + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \Big] \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2,$$

$$(f_0, \zeta) = \iint_\Omega f_0 \zeta \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

请注意：$a(w, \zeta)$是有物理意义的，对板弯曲问题，它的势能$E(w)$可写成

$$E(w) = \frac{D}{2}\iint_\Omega \Big\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\nu)\Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\Big)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big] \Big\} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

而$a(w, \zeta)$就是它的微分，即对一切$\zeta \in W_0$

$$(E'(w),\zeta)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{E(w+\lambda\zeta)-E(w)}{\lambda}=a(w,\zeta).$$

利用这样定义的双线性形式$a(w,\zeta)$，对其他形式边界条件的板弯曲问题(如简支边界条件，自由边界条件等)都可以写出类似的弱形式.

§7. 相似解(量纲分析)

度量一个物理量，首先必须引入一定的测量单位系，如SI制. 一般来说，被度量的物理量的数量与测量单位系的选取是有关系的.这种物理量我们称之为有量纲的，否则称之为无量纲的.

在全部量纲中，长度——L，时间——T，质量——M，温度——θ称为基本量纲，其他物理量的量纲都可以由这四个基本量纲导出，所以称为导出量纲.如

速度　　$[v]=LT^{-1}$,

加速度　$[g]=LT^{-2}$,

力　　　$[F]=MLT^{-2}$.

定义2　假设$a_1,\cdots,a_n$是给定的一组物理量，我们称它们是量纲相关的，是指存在一组不全为零的常数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得$a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}$是无量纲的，否则我们称$a_1,\cdots,a_n$是量纲无关的.

定义 3　若$a_1,\cdots,a_n$是给定的一组物理量，且存在一组常数$\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$，使得$\pi=\frac{a_1}{a_2^{\beta_1}\cdots a_n^{\beta_{n-1}}}$是无量纲的，则我们称物理量$a_1$可以通过其他物理量$a_2,\cdots,a_n$量纲表示.

根据这两个定义，下面两个推论是显然的：

1°　若$a_1,\cdots,a_n$中有一个是无量纲的，则$a_1,\cdots,a_n$量纲相关.

2°　若$a_1,\cdots,a_n$量纲无关，$a_0,a_1,\cdots,a_n$量纲相关，则a_0可以通过$a_1,\cdots,a_n$量纲表示.

由理论或直接由实验建立的物理定律，都是表征了所研究现象的诸量之间的函数关系.这些有量纲的物理量的数值，依赖于量

度单位制的选取，而单位制与现象的本质无关. 所以，表示与量度单位制无关的物理事实的函数关系应具有某种特殊的结构. 量纲分析的基础—— π定理就揭示了这种函数的结构.

定理 2（π 定理） 如果某一现象中出现的$n+1$个物理量$a, a_1, \cdots, a_n$由关系式$a=f(a_1, \cdots, a_n)$联系起来；又若$a_1, \cdots, a_r$是物理量$a_1, \cdots, a_n$中r个最大的量纲无关物理量，则a及其余的$a_{r+1}, \cdots, a_n$等$n-r+1$个物理量的关系式可化成下列只联系$n-r+1$个无量纲量$\pi, \pi_1, \cdots, \pi_{n-r}$的无量纲形式:

$$\pi=\phi(\pi_1, \cdots, \pi_{n-r}), \tag{7.1}$$

其中

$$\pi=\frac{a}{a_1^{\gamma_1}\cdots a_r^{\gamma_r}}, \pi_1=\frac{a_{r+1}}{a_1^{\beta_1}\cdots a_r^{\beta_r}}, \quad \cdots, \quad \pi_{n-r}=\frac{a_n}{a_1^{\lambda_1}\cdots a_r^{\lambda_r}}. \tag{7.2}$$

称为无量纲准数.

证明 $$\pi=\frac{1}{a_1^{\gamma_1}\cdots a_r^{\gamma_r}} f(a_1, \cdots, a_n)$$

$$=\frac{1}{a_1^{\gamma_1}\cdots a_r^{\gamma_r}} f(a_1, \cdots, a_r, \pi_1(a_1^{\beta_1}\cdots a_r^{\beta_r}), \cdots, \pi_{n-r}(a_1^{\lambda_1}\cdots a_r^{\lambda_r}))$$

$$=F(a_1, \cdots, a_r, \pi_1, \cdots, \pi_{n-r}).$$

由于$\pi, \pi_1, \cdots, \pi_{n-r}$是无量纲的，因此，它们的数值与所选取的测量单位系无关. 特别地，选取新的测量单位系，使得a_1的量值增大α倍，而$a_2, \cdots, a_r$的量值不变，于是在新的测量单位下，同时有

$$\pi=F(\alpha a_1, a_2, \cdots, a_r, \pi_1, \cdots, \pi_{n-r}),$$

以及

$$\pi=F(a_1, a_2, \cdots, a_r, \pi_1, \cdots, \pi_{n-r}),$$

从而$\frac{\partial F}{\partial a_1}=0$，同理$\frac{\partial F}{\partial a_i}=0(i=2, \cdots, r)$，即$F$不依赖于$a_1, \cdots, a_r$，从而定理得证.

由π定理，即可得

$$a=\frac{1}{a_1^{x_1}\cdots a_r^{x_r}}\,\phi\left(\frac{a_{r+1}}{a_1^{y_1}\cdots a_r^{y_r}},\cdots,\frac{a_n}{a_1^{z_1}\cdots a_r^{z_r}}\right).\tag{7.3}$$

由此可以看出，物理量a与$a_1,\cdots,a_n$依赖关系将变得更加明显简洁.应用π定理来处理一些具体问题的步骤大致可归纳为:

1° 无遗漏地确定所有的主定物理量$a_1,\cdots,a_n$与被定物理量$b_1,\cdots,b_m$(相当于π定理中的a)，写出依赖关系

$$b_i=f_i(a_1,\cdots,a_n),\qquad i=1,\cdots,m;$$

2° 确定一个测量单位系，并写出主定与被定物理量的量纲;

3° 在主定物理量中选出一组最大量纲无关组，将每一个被定物理量及余下的主定物理量和这一组最大量纲无关物理量组成无量纲形式;

4° 应用π定理写出上述m个关系式的无量纲形式.

例 1 沿着与地平面相交α角的方向以初速度v_0抛出一质量为m的物体，如果略去空气阻力，试求抛射距离D、落地时间t和最大高度H.

主定物理量: m,v_0,α,g.

被定物理量: D,t,H.

$$D=f_1(m,v_0,\alpha,g),\quad t=f_2(m,v_0,\alpha,g),$$
$$H=f_3(m,v_0,\alpha,g).$$

量纲: $[m]=M,\ [v_0]=LT^{-1},\quad [\alpha]=1,\ [g]=LT^{-2},$

$$[D]=[H]=L,\quad [t]=T.$$

主定物理量中最大量纲无关组: m,v_0,g.

无量纲准数:

$$\pi=\frac{\alpha}{m^0v_0^0\ g^0},\qquad \pi_1=\frac{D}{v_0^2\ g^{-1}},$$

$$\pi_2=\frac{t}{m^0v_0\ g^{-1}},\qquad \pi_3=\frac{H}{v_0^2\ g^{-1}}.$$

应用π定理写成无量纲形式:

$$\pi_1=\phi_1(\pi),\quad \pi_2=\phi_2(\pi),\quad \pi_3=\phi_3(\pi),$$

即

$$D=\frac{v_0^2}{g}\phi_1(\alpha),\quad t=\frac{v_0}{g}\phi_2(\alpha),\quad H=\frac{v_0^2}{g}\phi_3(\alpha). \tag{7.4}$$

虽然我们没有最终确定函数 $\phi_i(\alpha)$ $(i=1,2,3)$的具体形式，但我们已把它们之间的依赖关系揭露得相当清楚了.

例 2 求上半空间热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.5}$$

的解，其定解条件为

$$u(x,0)=Q\delta(x), \tag{7.6}$$

$$u(\infty,t)=0. \tag{7.7}$$

即初始条件是一个在原点的强度为Q的点热源.

主定物理量：x、t、a^2、Q.

被定物理量：u.

$$u=f(x,t,a^2,Q).$$

量纲：$[x]=L$，$[t]=T$，$[a^2]=L^2T^{-1}$，$[Q]=\theta L$，$[u]=\theta$.

主定物理量中最大量纲无关组：a^2，t，Q.

无量纲准数：

$$\pi=\frac{u}{Qa^{-1}t^{-\frac{1}{2}}},\ \pi_1=\frac{x}{a\sqrt{t}}.$$

应用π定理写成无量纲形式：

$$\pi=\phi(\pi_1).$$

即

$$u=\frac{Q}{a\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x}{a\sqrt{t}}\right).$$

令$\xi=\frac{x}{a\sqrt{t}}$，则$u=\frac{Q}{a\sqrt{t}}\phi(\xi)$.于是所求的问题可写成

$$\begin{cases} \phi''(\xi)+\frac{1}{2}\xi\phi'(\xi)+\frac{1}{2}\phi(\xi)=0, & (7.8) \\ \phi(\infty)=0, & (7.9) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi=1. & (7.10) \end{cases}$$

求解上述常微分方程，得到

$$\phi=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right).$$

于是

$$u(x,t)=\frac{Q}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right). \tag{7.11}$$

例 3 点源强爆炸

我们来研究空间中的爆炸(比如说原子弹爆炸)初期(即t很小)，空间的温度分布情况.由于在爆炸初期，物质的移动可以略去不计.在不含爆炸点处满足的能量平衡方程为

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{q}=0. \tag{7.12}$$

其中c为比热，ρ为密度，q为热流密度，u是温度.

$$\boldsymbol{q}=-\lambda\,\mathrm{grad}u.$$

由于在此阶段的热传导主要是光辐射，其热传导系数与温度的关系为

$$\lambda=\lambda_0 u^n.$$

λ_0为常数，$n\approx 5$.于是

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{q}&=-\lambda_0\mathrm{div}(u^n\,\mathrm{grad}u)\\&=-\frac{\lambda_0}{n+1}\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}u^{n+1})\\&=-\frac{\lambda_0}{n+1}\Delta(u^{n+1}).\end{aligned}$$

取爆炸点为球心，设$u=u(r,t)$.r为空间一点到球心的距离，即

研究球对称的情况下温度的分布，由于

$$\Delta(u^{n+1})=r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}u^{n+1}\right).$$

能量平衡方程(7.12)变成

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\chi r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}u^{n+1}\right). \tag{7.13}$$

其中$\chi=\lambda_0/(n+1)c\rho$为常数.加上下列初边值条件

$$u(r,0)=0 \qquad (r\neq 0),$$

$$4\pi\int_0^{\infty}u(r,0)r^2\mathrm{d}r=Q.$$

$$u(\infty,t)=0 \qquad (t>0).$$

下面利用π定理求解$u(r,t)$.

主定物理量：r、t、χ、Q.

被定物理量：u.

$$u=f(r,t,\chi,Q).$$

量纲：$[r]=L,[t]=T,[\chi]=L^2T^{-1}\theta^{-n},[Q]=\theta L^3,[u]=\theta.$

主定物理量中最大量纲无关组：χ、t、Q.

无量纲准数：

$$\pi=\frac{u}{[Q^2(\chi t)^{-3}]^{1/(3n-2)}},\ \pi_1=\frac{r}{[Q^n\chi t]^{1/(3n-2)}}=\xi.$$

应用π定理写成无量纲形式：

$$\pi=\phi(\pi_1).$$

即

$$u=[Q^2(\chi t)^{-3}]^{1/(3n+2)}\phi(\xi).$$

于是，原来的问题化为常微分方程问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\phi^{n+1}}{\mathrm{d}\xi^2}+\dfrac{2}{\xi}\dfrac{\mathrm{d}\phi^{n+1}}{\mathrm{d}\xi}+\dfrac{1}{3n+2}\xi\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}+\dfrac{3}{3n+2}\phi=0, & (7.14)\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\phi(\xi)\xi^2\mathrm{d}\xi=\frac{1}{4\pi}, & (7.15)\\ \phi(\infty)=0. & (7.16)\end{cases}$$

由(7.14)、(7.16)知

$$\phi(\xi)=\begin{cases} K(\xi_0^2-\xi^2)^{1/n}, & \xi<\xi_0;\\ 0, & \xi\geqslant\xi_0.\end{cases}$$

其中

$$K=[n/2(n+1)(3n+2)]^{1/n}.$$

由条件(7.15),知

$$K\int_0^{\xi_0}\xi^2(\xi_0^2-\xi^2)^{1/n}\mathrm{d}\xi=K\xi_0^{(3n+2)/n}\int_0^1(1-\zeta^2)^{1/n}\zeta^2\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{1}{4\pi}.$$

从而

$$\xi_0=\left[2\pi K\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-\frac{n}{3n+2}},$$

其中B为β函数.

于是,当$r<r_f(t)\overset{\mathrm{d}}{=}\xi_0(n)[Q^n\chi t]^{\frac{1}{3n+2}}$时,

$$u(r,t)=\left(\frac{Q^2}{\chi t^3}\right)^{\frac{1}{3n+2}}K\left[\xi_0^2-\frac{r^2}{(Q^n\chi t)^{2/(3n+2)}}\right]^{\frac{1}{n}}. \qquad (7.17)$$

当$r\geqslant r_f(t)$时,$u(r,t)\equiv0$.

第五章　非线性波和特征线方法

由非线性微分方程描述的波动现象，与声、光或电磁信号的"线性"波动现象极不相同. 首先，对非线性波，它不再服从大家所熟知的叠加、反射和折射规律，而是表现出更为新颖的特性，其中最为突出的是激波阵面的出现. 介质穿过激波阵面时其速度、压力和温度会发生突然的、往往是相当大的变化. 即使运动开始时是连续的，其后却可能自动发生间断. 而在另一些条件下，也可能出现相反的情况，初始间断会自动消失. 这些现象的出现与刻画运动的基本方程的非线性有关.

对于了解和掌握非线性波现象，有关的数学概念及其技巧已经有了相当丰富的发展. 本章的目的是就涉及某些当代最重要的非线性问题作一简单的介绍. 这些非线性问题，不论从工程物理和数值计算，还是从数学本身的发展看，都是很重要的.

在许多情况下，描述物理规律的基本方程可以化为一阶偏微分方程(组). 本章中所讨论的非线性波就是由这种类型微分方程刻画的波动现象，而处理这类波动问题时，特征线方法占有重要的地位. 为了更好地了解后面几节中对一些特殊问题的处理，我们先对一阶偏微分方程(组)的理论，其中主要是有关特征的概念作一些必要的介绍. 在介绍中将以线性方程为主，对非线性一阶方程(组)的讨论，将在后面三节中结合具体的非线性波问题再作讨论.

§1.　一阶线性偏微分方程的数学理论

1.1　包含一个二元函数的一阶线性方程

我们考虑包含一个未知函数$u(x,t)$的一阶线性方程

$$u_t + A(x,t)u_x + B(x,t)u = F(x,t). \tag{1.1}$$

这里我们假定

$$A、B、F、A_x、B_x、F_x \in C(\mathbf{R}\times[t_0,\infty)).$$

函数$f(x,t)$的两个偏微商的线性组合：$af_t + bf_x$表示该函数沿给定方向$\mathrm{d}t : \mathrm{d}x = a : b$的微商.若$t(\sigma)$、$x(\sigma)$代表$t_\sigma : x_\sigma = a : b$的一条曲线，那么$af_t + bf_x$就是该函数沿这条曲线的微商.

对方程(1.1)，若我们用$\chi(\tau;x,t)$表示方程

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = A(\xi,\tau) \tag{1.2}$$

过点(x,t)的解(即$\xi=\chi(\tau;x,t)$)，那么沿曲线$\xi=\chi(\tau;x,t)$，方程中的微分算子$\frac{\partial}{\partial\tau}+A\frac{\partial}{\partial\xi}$可写成全微分的形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial\xi}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\tau} + A\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

我们称曲线$\xi=\chi(\tau;x,t)$为方程(1.1)的特征(曲线)，方程(1.2)为方程(1.1)的特征方程．由常微分方程的一般理论知，若A、$A_x \in C(\mathbf{R}\times[t_0,\infty))$，则(1.2)存在过给定点$(x,t)$的唯一解.于是，由直线$\tau=t_0$上的每一点$(x,t_0)$都可以引出一条特征$\chi(\tau;x,t_0)$.又由常微分方程理论知，它们可以延续到$\tau\to\infty$，或$x\to\pm\infty$.我们将所有这些特征覆盖的半平面$\mathbf{R}\times[t_0,\infty)$上的子集称为直线$\tau=t_0$的影响区域，且用$D(\mathbf{R},t_0)$表示之.

现在我们求(1.1)满足初始条件

$$u(x,t_0)=\varphi(x) \tag{1.3}$$

的解，这里$\varphi(x)\in C^1(\mathbf{R})$．为此我们将$\chi(\tau;x,t)$代入方程(1.1)，且令$U(\tau)=u(\chi(\tau;x,t),\tau)$，于是(1.1)可化为常微分方程形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}U(\tau)+B(\chi(\tau;x,t),\tau)U(\tau)=F(\chi(\tau;x,t),\tau). \tag{1.4}$$

由t_0到t积分上式得到

$$U(t)=U(t_0)v(t_0;x,t)+\int_{t_0}^{t} F(\chi(\tau;x,t),\tau)v(\tau;x,t)\mathrm{d}\tau, \qquad (1.5)$$

其中

$$v(t_0;x,t)=\exp\left[-\int_{t_0}^{t} B(\chi(\tau;x,t),\tau)\mathrm{d}\tau\right].$$

又

$$U(t_0)=u[\chi(t_0;x,t),t_0]=\varphi(\chi(t_0;x,t)),$$

$$U(t)=u(\chi(t;x,t),t)=u(x,t),$$

于是,得下面形式的解:

$$u(x,t)=\varphi(\chi(t_0;x,t))v(t_0;x,t)+\int_{t_0}^{t} F(\chi(\tau;x,t),\tau)v(\tau;x,t)\mathrm{d}\tau. \qquad (1.6)$$

不难验证(1.6)是满足方程(1.1)和初始条件(1.3)的.上述的求解方法被称为特征线方法.由上面的讨论知下述定理成立:

定理 1 设A、B、F、$A_x B_x$、$F_x\in C(\mathbf{R}\times[t_0,\infty))$且$\varphi\in C^1(\mathbf{R})$. 于是,问题(1.1)(1.3)在$D(\mathbf{R};t_0)$中有唯一解,它由公式(1.6)给出.

初始条件φ可以只在点(x_0,t_0)和(x_1,t_0)间的区间J上给定,这时可以在两特征$\chi(\tau;x_0,t_0)$和$\chi(\tau;x_1,t_0)$间的带形区域中求解u,这个带形区域是区间J的影响区域.

如果$B\equiv 0$且$F\equiv 0$,由(1.6)可得到$u(x,t)=\varphi(\chi(t_0;x,t))$,这表示沿每条特征,解是常数.

为了更具体地了解上述求解方法,我们考虑如下几个例子.

例 1. 求解问题

$$\begin{cases} u_t+au_x=f(x,t), \\ u(x,t_0)=\varphi(x), \end{cases}$$

其中a为常数,f、$f_x\in C(\mathbf{R}\times[t_0,\infty))$,$\varphi\in C^1(\mathbf{R})$. 容易看到,沿直线$x=at+c$(它是特征方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a$的解,$c$为任意常数.)微分算子

$\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}$可表为关于$t$的全微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}.$$

于是，微分方程可写成常微分方程形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(at+c,t)=f(at+c,t).$$

从t_0到t将它积分，并考虑到初始条件$u(x,t_0)=\varphi(x)$，我们沿着直线$x=at+c$得

$$u(at+c,t)=u(at_0+c,t_0)+\int_{t_0}^{t}f(as+c,s)\mathrm{d}s$$

$$=\varphi(at_0+c)+\int_{t_0}^{t}f(as+c,s)\mathrm{d}s.$$

我们将$c=x-at$代入上式，就得原问题的解为

$$u(x,t)=\varphi(at_0+x-at)+\int_{t_0}^{t}f(as+x-at,s)\mathrm{d}s.$$

例 2. 求解问题

$$\begin{cases} u_t+(x\cos t)\,u_x=0,\ -\infty<x<\infty,\ t>0,\\ u(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2}.\end{cases}$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}=\xi\cos\tau.$$

过点(x,t)的解为$\chi(\tau;x,t)=x\exp(\sin\tau-\sin t)$。因此，直线$\tau=0$的影响区域是半平面$\tau\geqslant 0$，而解为

$$u(x,t)=\frac{1}{1+x^2\exp(-2\sin t)}.$$

例 3 求解问题

$$\begin{cases} u_t+x^2u_x=0,\ -\infty<x<\infty,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\end{cases}$$

其中$\varphi(x)\in C^1(\mathbf{R})$.

过点(x,t)的特征为

$$\chi(\tau;x,t)=\frac{x}{1+x(t-\tau)}.$$

容易看出，直线$\tau=0$的影响区域D是由第一和第二象限中在双曲线$t=-\dfrac{1}{x}$下面的所有的点所组成.此集合中的每一点确有一条特征通过，它与直线$\tau=0$交于点$\left(\dfrac{x}{1+xt},0\right)$.因此，在$D$中的解为

$$u(x,t)=\varphi\left(\frac{x}{1+xt}\right).$$

1.2 含多个空间变元的一阶方程

我们考虑线性方程的初值问题

$$u_t+\sum_{j=1}^{n}A_j(x,t)u_{x_j}+B(x,t)u=F(x,t), \tag{1.7}$$

$$u(x,t_0)=\varphi(x), \tag{1.8}$$

这里$x=(x_1,\cdots,x_n)$，A_j、B、F及它们关于x_j $(j=1,\cdots,n)$的一阶偏微商都属于$C(\mathbf{R}^n\times[t_0,\infty))$，$\varphi\in C^1(\mathbf{R}^n)$.

与一个空间变元情况类似，我们称方程组

$$\frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}\tau}=A_j(\xi,\tau),j=1,\cdots,n \tag{1.9}$$

为(1.7)的特征方程，并称(1.9)的任意一个解为(1.7)的特征.我们用$\chi(\tau;x,t)=(\chi_1(\tau;x,t),\cdots,\chi_n(\tau;x,t))$表示过点$(x,t)$的特征.

我们由点(x,t_0)，$x\in\mathbf{R}^n$引出所有的特征，这些特征所覆盖的半空间$\mathbf{R}^n\times[t_0,\infty)$上的子集，被称为平面$\tau=t_0$的影响区域，我们用$D(\mathbf{R}^n,t_0)$表示之.于是同样地，如下定理成立.

定理2 设A_j、B、F和它们关于x_j $(j=1,\cdots,n)$的一阶偏微商都属于$C(\mathbf{R}^n\times[t_0,\infty))$类，$\varphi\in C^1(\mathbf{R}^n)$. 令$(x,t)\in D$. 于是问

题(1.7)、(1.8)有唯一的解

$$u(x,t)=\varphi(\chi(t_0;x,t))v(t_0;x,t)$$

$$+\int_{t_0}^{t} F(\chi(\tau;x,t),\tau)v(\tau;x,t)\mathrm{d}\tau, \qquad (1.10)$$

其中

$$v(t_0;x,t)=\exp\left(-\int_{t_0}^{t} B(\chi(\tau;x,t),\tau)\mathrm{d}\tau\right). \qquad (1.11)$$

同样，初始条件φ可以只给定在$t=t_0$平面的有限区域I上，由I的边界∂I上每一点引出的特征线所围成的区域为I的影响区域.

1.3 一阶双曲型方程组

我们考虑具有一个空间变量的线性方程组

$$\boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{A}(x,t)\boldsymbol{u}_x+\boldsymbol{B}(x,t)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}(x,t), \qquad (1.12)$$

其中

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_t=\begin{pmatrix} (u_1)_t \\ \vdots \\ (u_m)_t \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_x=\begin{pmatrix} (u_1)_x \\ \vdots \\ (u_m)_x \end{pmatrix}, \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}.$$

这里$\boldsymbol{A}(x,t)$、$\boldsymbol{B}(x,t)$是$m\times m$方阵，我们假设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{F}$足够光滑.对于方程组，一般地是不能像单个方程那样化为常微分方程来求解.但对方程组(1.12)，我们可以设法找一组新的变量$v_1,\cdots,v_m$(它们是$u_1,\cdots,u_m$的线性组合)和m条特征曲线，使得在对新变量的第j个方程中的微分部分可以表成v_j沿第j条特征的方向微分.当然这在实数和实函数域中并不总是能做到的，只有对所谓的双曲型或严格双曲型方程组才可能.

现在我们对方程组引入特征的定义.如果对区域$Q\subset\mathbf{R}^2$中的每一点，矩阵$\boldsymbol{A}(x,t)$的所有特征值$\lambda_1(x,t),\cdots,\lambda_m(x,t)$都是实的，且存在$m$个线性无关的左特征向量，$\boldsymbol{l}_1(x,t),\cdots,\boldsymbol{l}_m(x,t)$，那么我们称方程组(1.12)是双曲型的.若特征值$\lambda_1(x,t),\cdots,\lambda_m(x,t)$是实而互异的，则我们称方程组是严格双曲型的.下面我们将只限于讨论严格双

曲型方程组.

对一个严格双曲型方程组(1.12),我们称方程组

$$\frac{d\xi_j}{d\tau}=\lambda_j(\xi,\tau), \qquad j=1,\cdots,m \tag{1.13}$$

的解的第j个分量为第j条特征.上面方程组过点(x,t)的相应的解,我们用$\chi_j(\tau;x,t)$表示之.向量$(\chi_1,\cdots,\chi_m)$简写成$\boldsymbol{\chi}$.

对严格双曲组(1.12)可以化为一种简化的形式.令$\boldsymbol{l}_1,\cdots,\boldsymbol{l}_m$是$\boldsymbol{A}(x,t)$的线性无关的左特征向量,令$\boldsymbol{L}(x,t)$是以$\boldsymbol{l}_k$为第$k$行的矩阵.于是,$\boldsymbol{L}$是正则的,且存在逆矩阵$\boldsymbol{L}^{-1}$.用$\boldsymbol{L}$乘方程(1.12),令$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1}$,于是得

$$\boldsymbol{v}_t+\boldsymbol{D}(x,t)\boldsymbol{v}_x+\boldsymbol{B}_0(x,t)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}_0(x,t), \tag{1.14}$$

其中$\boldsymbol{B}_0=(\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}_x-\boldsymbol{L}_t)\boldsymbol{L}^{-1}$,$\boldsymbol{F}_0=\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}$,而$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$是以$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$为元的对角矩阵.我们称(1.14)为对角型的方程组.显然,对某些特殊情况,例如$\boldsymbol{B}_0(x,t)$也是对角或三角形矩阵,对角形式的方程组(1.14)是容易求解的.

现在讨论初值问题

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{D}(\lambda_1(x,t),\cdots,\lambda_m(x,t))\boldsymbol{u}_x+\boldsymbol{B}(x,t)\boldsymbol{u}&\\=\boldsymbol{F}(x,t),\ x\in\mathbf{R},\ t\geqslant t_0,&\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{u}(x,t_0)=\boldsymbol{\varphi}(x),\ x\in\mathbf{R} \tag{1.16}$$

的解的存在性.为此我们对$x\in\mathbf{R}$,$\tau\geqslant t_0$构造所有的特征$\chi_j(\tau;x,t_0)$,用Q_j表示这些特征所覆盖的集合.定义集合

$$D(\mathbf{R};t_0)=\bigcap_{j=1}^{m}Q_j$$

为直线$t=t_0$的影响区域.令$(x,t)\in D(\mathbf{R};t_0)$,方程(1.15)可改写成

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}u_j(\chi_j(\tau;x,t),\tau)+\sum_{k=1}^{m}b_{jk}(\chi_j(\tau;x,t),\tau)u_k(\chi_j(\tau;x,t),\tau)&\\-F_j(\chi_j(\tau;x,t),\tau)=0,\qquad j=1,\cdots,m&\end{aligned}$$

我们从t_0到t积分上式,于是得

$$G_j(x,t,u)\equiv u_j(x,t)-\varphi_j(\chi_j(t_0;x,t))$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{m} b_{jk}(\chi_j(\tau;x,t),\tau)u_k(\chi_j(\tau;x,t),\tau)\mathrm{d}\tau \\
&-\int_{t_0}^{t} F_j(\chi_j(\tau;x,t),\tau)\mathrm{d}\tau \\
=&0, \qquad j=1,\cdots,m.
\end{aligned}
$$

显然有

$$G_j(x,t,\varphi(x))=0$$

及

$$\det\left(\frac{\partial G_j(x,t,\varphi(x))}{\partial u_k}\right)_{j,k=1}^{m}=1.$$

应用改进的隐函数定理(在定理中令$r=1$, $s=m$, $Q_t=D(\mathbf{R};t_0)$)(参看本节附录),于是证明了下列定理:

定理 3 设λ_j、$b_{jk}(j,k=1,\cdots,m)$、F及它们关于x的一阶微商分别在$\mathbf{R}\times[t_0,\infty)$和$\mathbf{R}$中是连续的.于是存在一个包含直线$t=t_0$的区域$Q_t'\subset D(\mathbf{R};t_0)$以及定义在$Q_t'$上的函数$u_j(x,t)(j=1,\cdots,m)$,它们本身及关于$x$和$t$的一阶偏微商在$Q_t'$上是连续的.$u_j$构成问题(1.15)、(1.16)在$Q_t'$上的唯一解.

这里得到的仅是局部解.要得到在整个影响区域$D(\mathbf{R};t_0)$中的整体解,则要用解析延拓的办法,一步步解初值问题.即,由定理我们第一步求到$t=t_1(t_1>t_0$且$t=t_1$含在Q_t'中)上的u_j值,然后,以$t=t_1$上的u_j值作为初值,利用定理可以求出$t=t_2(t_2>t_1)$上的u_j值.这样,一步步求解下去,直至整个影响区域上的u_j值都求出为止.

对于一般情况下的初边值问题的存在定理,由于证明太麻烦,在此就不作介绍了.但我们这里需对初边值问题的提法,作一点说明.

在$Q\subset\mathbf{R}\times[t_0,\infty)$上的一个初边值问题是由方程组、在$Q$中对$t=t_0$给出的初始条件和在$Q$的边界上的一个适当部分上给定的边界条件所组成的.例如,若$Q=\mathbf{R}^+\times[t_0,\infty)$,那么边界条件是在$x=0$, $t\geqslant t_0$上给出,而初始条件是对$t=t_0$, $x\geqslant 0$给出.如若$Q=[0,l]\times[t_0,\infty)$,则我们对$x=0$, $t\geqslant t_0$和$x=l$, $t\geqslant t_0$给定边界条

件，而对$x\in[0,l]$，$t=t_0$给出初始条件．但是，边界条件的数目和形式不是任意的，由下面的例子可以看出，它们与Q的形状及特征线密切相关．

例如，考虑$Q=[0,l]\times\mathbf{R}^+$中的方程组

$$\begin{aligned}(u_1)_t+\lambda_1(u_1)_x&=0,\\(u_2)_t-\lambda_2(u_2)_x&=0,\\(u_3)_t&=0,\end{aligned}$$

其中λ_1、λ_2为正数，初始条件为

$$u_j(x,0)=\varphi_j(x),\qquad j=1,2,3,x\in[0,l].$$

方程组的特征为

$$\xi=\lambda_1\tau+c_1,\xi=-\lambda_2\tau+c_2,\xi=c_3,$$

且u_1,u_2,u_3分别在对应的特征上为常数．现在可以说明为何边界条件只能在边界的适当部分上给出．因为沿特征$\xi=\lambda_1\tau+c_1$分量u_1是常数，此特征具有正的斜率，显然在边界的右边部分，即$x=l$，$t=[0,l\lambda_1^{-1}]$上不能指定u_1的边界条件，因为它早已由初始条件

$$u_1(x,t)=\varphi_1(x-\lambda_1t),x\in[0,l],0\leqslant t\leqslant\lambda_1^{-1}x$$

定义了．如果我们指定

$$u_1(0,t)=h_1(t),t\geqslant0\tag{1.17}$$

（通常这样指定是最自然的），那么这时即使对$t>x\lambda_1^{-1}$也不能给定$x=l$上的u_1，因为由(1.17)已完全确定：

$$u_1(x,t)=h_1(t-x\lambda_1^{-1}),x\in[0,l],t\geqslant x\lambda_1^{-1}.$$

要唯一确定一个解还必须要求

$$\varphi_1(0)=h_1(0).$$

当$\varphi_1\in C[0,l]$，$h_1\in C(\mathbf{R}^+)$且上述条件也满足时，分量u_1在Q中是连续的．若要求解是古典解，则就还需要进一步的条件，即要求

$$\varphi_1'(0)=-\frac{1}{\lambda_1}h_1'(0),\varphi_1\in C^1[0,l],h_1\in C^1(\mathbf{R}^+).$$

对于分量u_2，左边部分的边界条件的情况和u_1在右边界上的情况是类似的．而对于分量u_3，显然除初始条件外不能指定任何边界条件．

对于一般情形，边界条件的给法是取决于在边界上特征方向的走向的. 如果对某个分量$u_i(x,t)$在边界上的特征方向是指向定解区域内部的，那么在此边界上就要给u_i的值，否则就不能给. 因此，在边界上有几个特征方向是指向定解区域内部的，就要给几个边界条件. 说得更具体些，如果定解区域是$Q=\{0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0\}$，假设在边界$x=0$和$x=l$上的特征如下:

$$\lambda_1(0,t)<\cdots<\lambda_i(0,t)<0<\lambda_{i+1}(0,t)<\cdots<\lambda_m(0,t), t\geqslant 0,$$

$$\lambda_1(l,t)<\cdots<\lambda_j(l,t)<0<\lambda_{j+1}(l,t)<\cdots<\lambda_m(l,t), t\geqslant 0,$$

那么在边界$x=0$上就要给$m-i$个条件:

$$u_{i+1}(0,t)=g_{i+1}(t), \cdots, u_m(0,t)=g_m(t), t\geqslant 0.$$

而在边界$x=l$上就要给j个条件:

$$u_1(l,t)=h_1(t), \cdots, u_j(l,t)=h_j(t), t\geqslant 0.$$

1.4 具有多个空间变元的方程组

我们考虑方程组

$$\boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{A}_1(x,t)\boldsymbol{u}_{x_1}+\cdots+\boldsymbol{A}_n(x,t)\boldsymbol{u}_{x_n}+\boldsymbol{B}(x,t)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}(x,t) \quad (1.18)$$

或

$$\boldsymbol{u}_t+\boldsymbol{A}_1(x,t,\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{x_1}+\cdots+\boldsymbol{A}_n(x,t,\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{x_n}=\boldsymbol{F}(x,t,\boldsymbol{u}), \quad (1.19)$$

其中$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}=(F_1,\cdots,F_m)^{\mathrm{T}}$，而$\boldsymbol{A}_j$, $\boldsymbol{B}$是$m\times m$方阵. 我们假定$\boldsymbol{A}_j$、$\boldsymbol{B}$及$\boldsymbol{F}$足够光滑.

如果对$(x,t)\in Q\subset\mathbf{R}^{n+1}$的任意一点和使$\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j^2\neq 0$的任意一组实的$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, m阶代数方程

$$\det\left(\lambda I+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_j(x,t)\eta_j\right)=0 \quad (1.20)$$

的全部根$\lambda=\lambda(x,t,\eta)$都是实的(或实而互异的)，我们就称方程组(1.18)是双曲型(或严格双曲型)的.

若对任意实的$\eta_1,\cdots,\eta_n$, $u_1,\cdots,u_m$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j^2\neq 0$和任意$(x,t)\in Q$, m阶代数方程

$$\det\left(\lambda I+\sum_{j=1}^{n}A_j(x,t,u)\eta_j\right)=0 \tag{1.21}$$

的全部根$\lambda=\lambda(x,t,u,\eta)$是实的(或实而互异的)，我们就称方程组(1.19)是双曲型(或严格双曲型)的.

这里我们将不去讨论初值问题的存在定理，只介绍一些关于特征曲面的概念.

考虑在一区域$Q\subset\mathbf{R}^{n+1}$上方程(1.19)的广义解.假定$A_k\in C^1(Q\times\mathbf{R}^m)$.设$Q$被曲面$\Sigma$分为两部分$Q_1$和$Q_2$，曲面$\Sigma$由方程

$$v(x_1,\cdots,x_n,t)=0,\ v\in C^1(\mathbf{R}^{n+1})$$

给出.我们求(1.19)在Q上连续、且其一阶微商分别在Q_1，Q_2中连续的广义解.它的微商在曲面Σ上可能发生跳跃.我们用$u_t^+,u_{x_1}^+,\cdots,u_{x_n}^+$和$u_t^-,u_{x_1}^-,\cdots,u_{x_n}^-$分别表示微商从$Q$的$v>0$和$v<0$部分趋于$\Sigma$时的极限.将方程组(1.19)在$\Sigma$两边分别取极限，而后相减.于是得

$$[u_t]+\sum_{k=1}^{n}A_k(x,t,u)[u_{x_k}]=0. \tag{1.22}$$

这里$[u_t]=u_t^+-u_t^-$，$[u_{x_k}]=u_{x_k}^+-u_{x_k}^-$，$k=1,\cdots,n$.

这种曲面Σ不可能是任意的.我们称在其上解的一阶微商可能发生跳跃的曲面Σ为特征曲面.现在我们来推导特征曲面的方程.为此在曲面Σ的一边取一条曲线

$$x=x(s),\ t=t(s).$$

显然u的每一个分量沿此曲线的微商为

$$\frac{\mathrm{d}u_j(x(s),t(s))}{\mathrm{d}s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_j(x(s),t(s))}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k(s)}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial u_j(x(s),t(s))}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s}.$$

因此

$$u_j(x(s),t(s))-u_j(x(s_0),t(s_0))$$
$$=\int_{s_0}^{s}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_j(x(\tau),t(\tau))}{\partial x_k}x_k'(\tau)+\frac{\partial u_j(x(t),t(\tau))}{\partial t}t'(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau. \tag{1.23}$$

现在我们在曲面Σ上取一条曲线C，再让它向Σ的两侧移动一个δ距离。因为(1.23)在Σ的两边都成立，我们取极限$\delta\to 0$，而后将两极限相减。由于u_j是连续的，而s_0和s是任意的，于是得

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right]\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}+\left[\frac{\partial u_j}{\partial t}\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=0. \tag{1.24}$$

因为曲线C是在Σ面上任意选取的，向量$\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s},\cdots,\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)$是在$\Sigma$的切平面上。关系式(1.24)表示向量$\left(\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right],\cdots,\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_n}\right],\left[\frac{\partial u_j}{\partial t}\right]\right)$平行于$\Sigma$的法方向。因此存在一函数$h_j=h_j(x,t)$，$(x,t)\in\Sigma$使得

$$\left(\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right],\cdots,\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_n}\right],\left[\frac{\partial u_j}{\partial t}\right]\right)$$

$$=\left(\frac{\partial v}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial v}{\partial x_n},\frac{\partial v}{\partial t}\right)h_j. \tag{1.25}$$

可以证明$h_j\in C(\Sigma)$，将上式代入(1.22)，得到

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\boldsymbol{I}+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}_k(x,t,\boldsymbol{u})\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}, \tag{1.26}$$

其中$\boldsymbol{h}=(h_1,\cdots,h_m)^{\mathrm{T}}$。如果跳跃确实存在，那么$h_j$ $(j=1,\cdots,m)$中至少有一个不为零，因此必定有

$$\det\left(\frac{\partial v}{\partial t}\boldsymbol{I}+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}_k(x,t,\boldsymbol{u})\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)=0. \tag{1.27}$$

这就是我们要求的特征曲面的方程。显然，对拟线性情况，特征曲面的方程是依赖于方程组(1.19)的解$\boldsymbol{u}$的。

作为一个例子，我们讨论Euler方程的特征曲面。对可压缩流体(具有$p=p(\rho)$，$p'(\rho)\geqslant 0$)的Euler方程为

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}=F_j,\qquad j=1,2,3, \tag{1.28}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k}+\rho \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0 \tag{1.29}$$

(在第四章中已推导了此方程组,在本章§3中还将详细地讨论).
若在(1.29)中把ρ视为u_4,于是(1.26)为

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_k} u_k\right) h_j+\frac{1}{\rho} p'(\rho) \frac{\partial v}{\partial x_j} h_4=0, \qquad j=1,2,3, \tag{1.30}$$

$$\rho \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_k} h_k+\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) h_4=0. \tag{1.31}$$

当且仅当

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2-p'(\rho) \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2\right\}=0 \tag{1.32}$$

时方程组(1.30)、(1.31)有非平凡解.我们定义波的速度为特征面的传播速度$\boldsymbol{V}_0$和流体质点的法向速度$\boldsymbol{u}_\nu$($\boldsymbol{\nu}$为特征面上的单位法向量)之差: $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0-\boldsymbol{u}_\nu$,速度$\boldsymbol{V}_0$的大小$\|\boldsymbol{V}_0\|$可用以下方法定出.我们在$t$和$t+\Delta t$时刻固定两个特征面,在第一个面上任取一点$P$,过$P$点引此面的法线,交第二个面于点$Q$.速度$\boldsymbol{V}_0$的大小就规定为$\|\boldsymbol{V}_0\|=\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\|PQ\|}{\Delta t}$.显然有$Q=P+s\,\mathrm{grad}_x v(P,t)$及$v(Q,t+\Delta t)=0$.因此

$$v(P+s\,\mathrm{grad}_x v, t+\Delta t)=0.$$

微分上关系式得到

$$s\|\mathrm{grad}_x v(P,t)\|^2+\frac{\partial v(P,t)}{\partial t}\Delta t=0.$$

因为$\|PQ\|=|s|\|\mathrm{grad}_x v(P,t)\|$,我们有

$$\|\boldsymbol{V}_0\|=\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| / \|\mathrm{grad}_x v\|. \tag{1.33}$$

而且$\|\boldsymbol{u}_\nu\|=|\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}_x v|/\|\mathrm{grad}_x v\|$.考虑到$\boldsymbol{V}_0$, $\boldsymbol{u}_\nu$和$\boldsymbol{\nu}$的所有可能的相关方向,我们得到

$$\|V\| = \left|\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \mathrm{grad}_x v\right| / \|\mathrm{grad}_x v\|. \tag{1.34}$$

返回到(1.32)，我们看出，它等价于

$$\|V\|^2 = 0, \|V\|^2 = p'(\rho).$$

第一式决定一个驻定波，而第二式定义了声速传播速度

$$\|V\| = \sqrt{p'(\rho)}.$$

显见，对Euler方程的任意一个解u，ρ不可能显式地定出函数v.

1.5 附录

改进的隐函数定理 设$Q_t \subset \mathbf{R}^r \times [t_0, \infty)$是包含整个平面$t=t_0$的一个区域. 令$G=(G_1, \cdots, G_s)$，$G_j = G_j(x,t,u) \in C^1(Q_t \times \mathbf{R}^s)$，$\psi=(\psi_1, \cdots, \psi_s)$，$\psi_j = \psi_j(x) \in C^1(\mathbf{R}^r)$，$j=1, \cdots, s$. 而且对$x \in \mathbf{R}^r$有$G(x,t_0,\psi(x))=0$及

$$\det\left(\frac{\partial G_j}{\partial u_k}(x,t_0,\psi(x))\right)_{j,k=1}^{s} = c \neq 0,$$

于是存在一个包含整个平面$t=t_0$的区域$Q_t' \subset Q_t$及存在一分量属于$C^1(Q_t')$的向量函数$u(x,t)$使得$u(x,t_0)=\psi(x)$，$x \in \mathbf{R}^r$且

$$G(x,t,u(x,t))=0, \quad \text{在} Q_t' \text{中}.$$

§2. 一阶非线性方程和交通流问题

2.1 交通流方程，守恒律和弱解

许多物理规律都可以用守恒律形式表示，最一般地，用微分方程

$$u_t + (F(u))_x = 0$$

给出，这里$u=(u_1, \cdots, u_m)$是x,t的向量值函数，$x \in \mathbf{R}^n$，$F(u)$是u的矩阵值函数. 我们用"守恒"这一词是因为如果$|x| \to \infty$时，$F(u) \to 0$，那么$\int_{-\infty}^{\infty} u \mathrm{d}x$是与$t$无关的常量，即这些积分是守恒的.

最简单的情况是具有两个变量t和x的单个守恒方程，这时u和F都是标量，我们用$\rho, q(\rho)$代替它们：

$$\rho_t + q(\rho)_x = 0, \ -\infty < x < \infty, t \geq 0. \tag{2.1}$$

交通流问题最早是由Lighthill和Whitham提出的.我们将交通流看成是连续的，对一段没岔道的公路，用$\rho(x,t)$表示车流局部密度，即在t时刻在x处单位长度上的车辆数;$q(x,t)$为车流量，在t时刻单位时间内通过x处的汽车数.对一段公路而言，汽车数是守恒的，就是说在任何区间$[x_1, x_2]$中汽车总数的变化率一定等于通过x_1和x_2处的净流入数，即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\mathrm{d}x - q(x_1, t) + q(x_2, t) = 0.$$

假设ρ, q是光滑的，令$|x_1 - x_2| \to 0$就得守恒方程.

$$\rho_t + q_x = 0. \tag{2.2}$$

对交通流问题，流量q主要是由局部密度ρ决定，这是因为司机一般总是根据局部密度的增加(减少)而放慢(加快)车速.这当然是一个简化的模型.我们可以定义一个流速u

$$u = q(\rho)/\rho. \tag{2.3}$$

因此它是ρ的减函数.当$\rho \approx 0$时，u有一个有限最大值$u_{\max}$，它是可容许的最大速度.随着$\rho \to \rho_j$时u减小到零，ρ_j是汽车一辆紧挨一辆时的密度ρ值(图5－1中示出了$u(\rho)$的图形).因此通量$q(\rho) = \rho u$

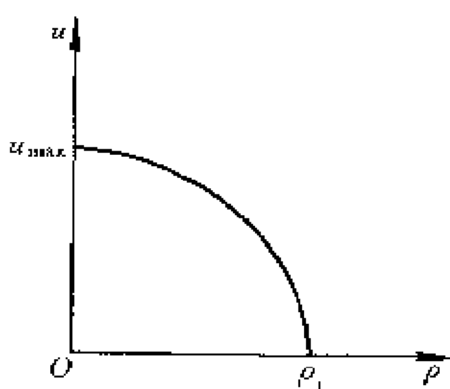


图5－1

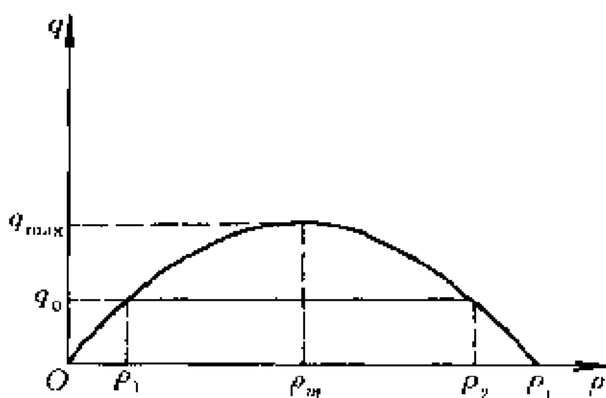


图5－2

在$\rho=0$和$\rho=\rho_j$时皆为零. 在0和ρ_j中间的某处$\rho=\rho_m$, $q(\rho_m)$具有最大值q_m.

考虑最简单的情况，即流动不依赖于时间的定常流. 由(2.2)得到

$$q=\rho u=\text{常数}.$$

一般地$q=q_0$线交$q=q(\rho)$曲线于两点(ρ_1, q_0)和(ρ_2, q_0)，见图5－2. 如果要求密度连续，就只能取常数解$\rho\equiv\rho_1$或$\rho\equiv\rho_2$. 如果允许ρ发生跳跃间断，那解将不是唯一的，图5－3中实线和虚线表示的都可以是问题的解.

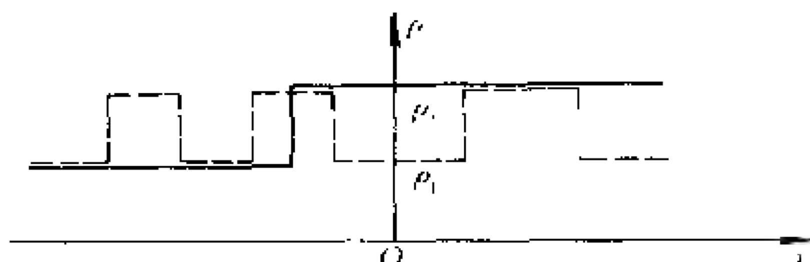


图 5－3

为了得到解的唯一性，需要加一个"熵条件". 这个术语是来自气体动力学. 在那里它有明确的物理意义. 对交通流问题，可以附加一个这样的"熵条件"：车辆不可能无限加速，即加速度有界，

$$\frac{\partial u}{\partial x}<\infty\left(\text{或}\frac{\partial \rho}{\partial x}>-\infty\right). \tag{2.4}$$

有了这个熵条件，初值问题的解将是唯一的.

我们这里先对一阶非线性方程给出弱解的一个精确定义，而后再来讨论交通流问题.

考虑一阶非线性方程

$$\rho_t+q(\rho)_x=0, \quad -\infty<x<\infty, \; t>0. \tag{2.5}$$

如果ρ是关于变量x, t的C^1类函数，且恒等地满足(2.5)，我们称ρ是(2.5)的一个古典解.

设$\varphi(x,t)$是任意C^1函数，且对$t=0$和大的$|x|$及t，都有$\varphi(x,t)=0$.

关系式

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,t)[\rho_t+q_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0$$

用Green公式得到

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi_t\,\rho+\varphi_x\,q(\rho)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{2.6}$$

对熵条件(2.4)，亦可写成

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)\frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t>-\infty,$$

上式中对所有$\psi\geqslant 0$，$\psi\in C^{\infty}$且对$t=0$和大的$|x|$及t有$\psi=0$. 同样经过分部积分后，上式可写成

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_x\,\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty. \tag{2.7}$$

定义1　一个局部可积函数$\rho(x,t)$，如果满足上面所说的关系式(2.6)、(2.7)，则称$\rho(x,t)$是(2.5)的一个弱解（满足熵条件的弱解）.

显然，一个古典解必定是一个弱解；反之，如果$\rho(x,t)$是一个弱解，且$\rho\in C^1$，则ρ必定是古典解.

对弱解还可以给出其它和(2.6)完全等价的定义，例如：

（Ⅰ）在连续可微区域中，$\rho(x,t)$是古典解，即满足微分方程(2.5)，而在$\rho(x,t)$的间断线$x=\xi(t)$上满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\frac{q^+-q^-}{\rho^+-\rho^-},$$

这里ρ^+，ρ^-分别表示$\rho(x,t)$在间断线$(\xi(t),t)$处的右极限和左极限，即$\rho^{\pm}=\rho(\xi(t)\pm 0,t)$，而$q^+=q(\rho^+)$，$q^-=q(\rho^-)$.

（Ⅱ）对于$t>0$的上半平面上与函数$\rho(x,t)$的间断线只相交有限个点的任意逐段光滑闭回路Γ，$\rho(x,t)$满足下面的积分关系式：

$$\int_{\Gamma}\rho\mathrm{d}x-q\mathrm{d}t=0.$$

2.2 初值问题

现在考虑一般的一阶非线性方程的初值问题:

$$\begin{cases} \rho_t + q(\rho)_x = 0, -\infty < x < \infty, t > 0, & (2.8) \\ \rho(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty. & (2.9) \end{cases}$$

令$a(\rho) = q'(\rho)$,于是(2.8)可写成

$$\rho_t + a(\rho)\rho_x = 0. \tag{2.10}$$

如果已知(2.8)的一个解$\rho(x,t)$,在xt平面上定义一条曲线C

$$C: \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(\rho). \tag{2.11}$$

我们称C为(属于解$\rho(x,t)$的)特征线,(2.11)为特征方程.由(2.10)可以看出,沿特征线C有$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$,在特征线$C$上$\rho$是常数,从而推得特征线(2.11)是直线,它的斜率为$(a(\rho))^{-1}$.根据这些性质,就可以对初值问题(2.8)、(2.9)的解作一些分析.

在x轴上的任意一点$P(x_p, 0)$,过这点的特征线C_p为

$$C_p: \qquad x = x_p + a_p t = x_p + ta(f(x_p)).$$

沿特征线C_p,ρ为常数

$$\rho(x,t) = f(x_p), (x,t) \in C_p.$$

于是得到初值问题的隐式形式的解

$$\begin{cases} x = x_p + ta(f(x_p)), \\ \rho(x,t) = f(x_p). \end{cases} \tag{2.12}$$

如果从(2.12)的第一式可以定出$x_p = x_p(x,t)$,即对任一点(x,t)能唯一地定出x轴上的一个对应点$(x_p, 0)$,那么我们就可以由(2.12)唯一地定出(x,t)处的ρ值.但是由(2.12)的第一式并不总是能定出x_p,当特征线C_p与从x轴上其它点引出的特征线相交时,就会出现麻烦.实际上,如果$(x_1, 0)$和$(x_2, 0)$是x轴上两点,$x_1 < x_2$,且它们使得

$$a(f(x_1)) > a(f(x_2)) > 0,$$

过这两点的两条特征线将交于某一点$Q(x,t)$,这时对应于Q点的x_p

值将不是唯一的.

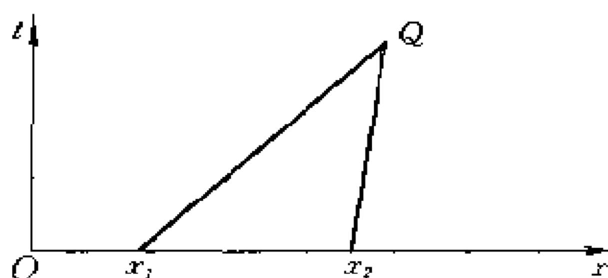


图 5－4

但如果特征线展开成扇形，即对所有的$x_l < x_r$都有

$a(f(x_l)) < a(f(x_r))$,　(2.13)

这时，xt平面上的特征线的斜率$\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = a^{-1}$随$x$增加是减小的. 它们不会相交. 过每一点只有一条特征线通过. 于是可以得到一个唯一的连续解.

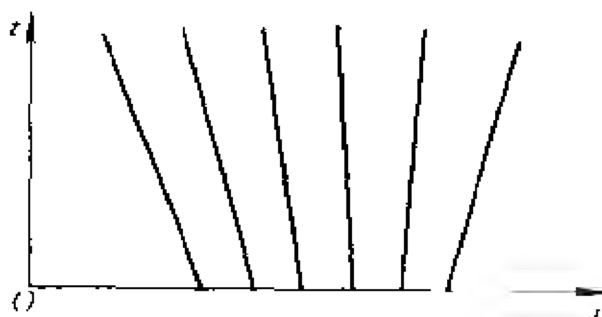


图 5－5

现在我们来看，当(2.13)不满足时，解(2.12)会出现什么情况. 由隐函数定理知，对函数关系

$$F(x,t,\xi)=0,$$

当且仅当$F_\xi \neq 0$时，可以唯一解出

$$\xi = g(x,t).$$

现在令

$$F(x,t,x_p) = ta(f(x_p)) - (x - x_p).$$

于是

$$F_{x_p} = t\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_p} + 1 = ta'f' + 1.$$

如果$a'f'>0$，则总有$F_{x_p}>0$；但若$a'f'<0$，那么将在某一个有限时刻t_*，会有

$$F_{x_p}|_{t=t_*} = 0.$$

由(2.12)式，我们有

$$\rho_t = \frac{-af'}{1+ta'f'}, \quad \rho_x = \frac{f'}{1+ta'f'}. \tag{2.14}$$

由上式可以看出，如果$\mathrm{d}a(f(x_p))/\mathrm{d}x_p = a'f' > 0$，(2,14)式中分母随时间增大而增大，这表示随着时间的推移，$\rho(x,t)$的分布将被拉平。相反，如果$a'f' < 0$，ρ的分布将变陡，而且这些微商值将在某一$t = t_*$时变为无穷大，这时初值问题(2.8)、(2.9)将不存在唯一连续解。而且即使初始密度分布$f(x)$是非常光滑的，也会出现这种解终究要发生间断的现象。

现在回到交通流问题。首先要问：在什么情况下交通流问题有连续解？为了回答这个问题，我们考虑通量曲线$q = q(\rho)$(见图5－2)。设在某$\rho = \rho_m$处$q(\rho)$达到最大值，那么q在$[0, \rho_m)$上是递增的，而在$(\rho_m, \rho_j]$上是递减的，在最大密度$\rho = \rho_j$处$q = 0$。于是

$$a(\rho) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho} = u + \rho u'(\rho)$$

是减函数，有

$$a'(\rho) < 0.$$

如果在一给定时刻，例如$t = 0$，右边的汽车比左边的快，即交通流是加速的，$u(x,0)$是x的增函数，在2.1段中我们曾假定$u(\rho)$是ρ的减函数，因此$\rho(x,0) = f(x)$是x的减函数，$f'(x) < 0$，于是我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a(\rho(x,0)) = a'(\rho(x,0)) f'(x) > 0.$$

根据隐函数定理，由(2.12)可得到唯一连续解。这时由(2.14)可看出，显见此解满足熵条件(2.4)。如果交通流是减速的，即$f'(x) > 0$，由先前的讨论知，不可能得到连续解。对于这种情况，将要求容许密度可以发生间断，这时车辆数守恒仍成立。

当ρ有间断时，守恒律可表示为：对(x,t)平面上任意闭曲线L，有

$$\oint_L \rho \mathrm{d}x - q \mathrm{d}t = 0.$$

或等价地，对每个区间$[x_1, x_2]$有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2}\rho\,\mathrm{d}x+q(\rho)\Big|_{x_1}^{x_2}=0. \tag{2.15}$$

现在考虑(2.5)的分片光滑解，并研究通过间断面时会出现什么情况. 我们将这种间断称为激波，xt平面上激波的迹线称为激波曲线.

密度ρ的间断自然隐含了速度u的间断. u的间断表现为瞬时或无限的减速. 在许多情况下，这种间断的出现表现为车流遇到障碍物(或红灯)时所产生的挤压堆积，或称交通拥塞.

现在从交通流的基本守恒律来推导跳跃条件. 设激波曲线为Γ: $x=s(t)$，$s(t)$是一连续可微函数. 由第四章§5引理7得到

$$[\rho]\cos(n,t)+[q]\cos(n,x)=0, \tag{2.16}$$

其中n是Γ的法向，

$$\cos(n,t)=\frac{-s'(t)}{\sqrt{1+s'^2(t)}},\quad \cos(n,x)=\frac{1}{\sqrt{1+s'^2(t)}}.$$

$[\rho]=\rho_+-\rho_-$，$[q]=q_+-q_-$分别表示函数ρ和q通过Γ的跳跃量. 经计算，(2.16)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{q_+-q_-}{\rho_+-\rho_-}=\sigma. \tag{2.17}$$

我们称$(\rho_+-\rho_-)$为激波强度，(2.17)式称为跳跃条件，$\sigma=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$是激波速度.

如果$\rho(x,t)$是(2.8)的一个弱解，那么在通过间断线时应满足跳跃条件(2.17)，且不难看出，当激波强度$(\rho_+-\rho_-)$趋于零时，激波速度就变为特征速度$a(\rho)$.

下面讨论激波过渡的一些基本性质，在2.1段中曾提到交通流问题的熵条件：车辆不可能突然间无限加速. 对激波过渡，条件(2.4)可写为

$$u_+<u_- \quad (\text{或}\rho_+>\rho_-). \tag{2.18}$$

我们首先证明：相对于激波右边的车辆而言，激波总是后退

的.就是说总有

$$\sigma < u_+. \tag{2.19}$$

实际上,由于$q=\rho u$,及(2.18)式

$$\sigma - u_+ = \frac{q_+ - q_-}{\rho_+ - \rho_-} - u_+ = \frac{\rho_-(u_+ - u_-)}{\rho_+ - \rho_-} < 0.$$

类似地,我们可以证明$\sigma < u_-$.这表明激波右边所有的车辆始终在激波的右边,而左边的车辆最终将撞到激波上而减速.

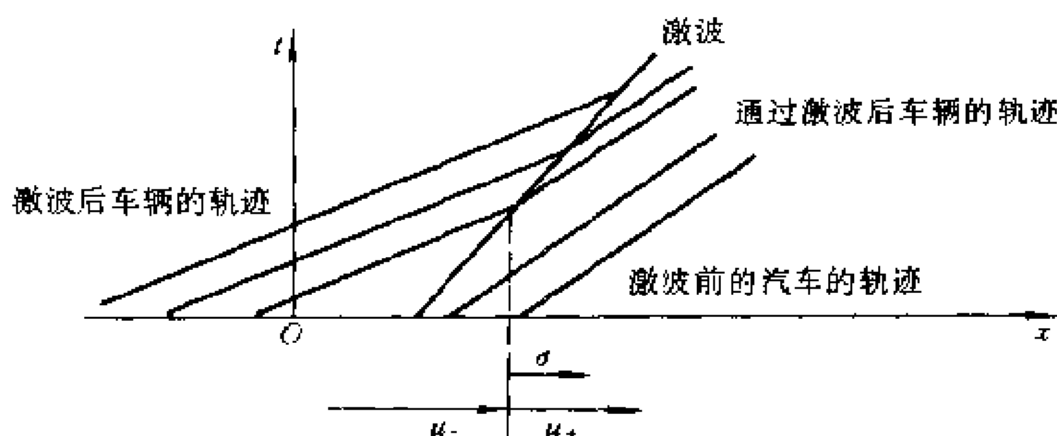


图 5-6

激波过渡的另一个性质是:特征是由两边进入激波的(见图5-7),或者说激波速度是在两边的特征速度之间:

$$a(\rho_+) < \sigma < a(\rho_-). \tag{2.20}$$

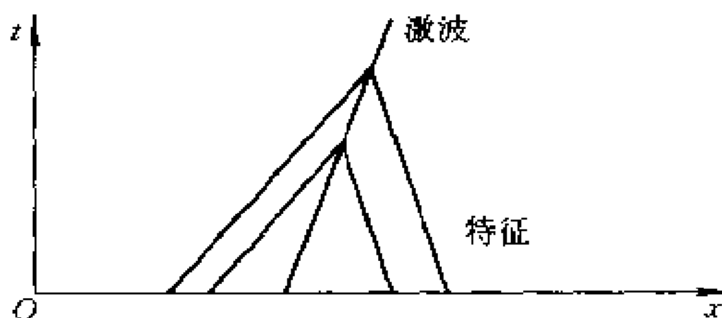


图 5-7

由(2.17)式可以看出,由密度ρ_+到ρ_-的一个激波过渡,其激波速度就是联接通量曲线$q=q(\rho)$上(ρ_+, q_+)和(ρ_-, q_-)两点线段的斜

率(图5－8)，而在xt平面上特征线的斜率满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(\rho)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho}.$$

由$q=q(\rho)$曲线图，及其凸性($q''<0$)，再利用条件(2.18)，不难证明(2.20)总是成立的.

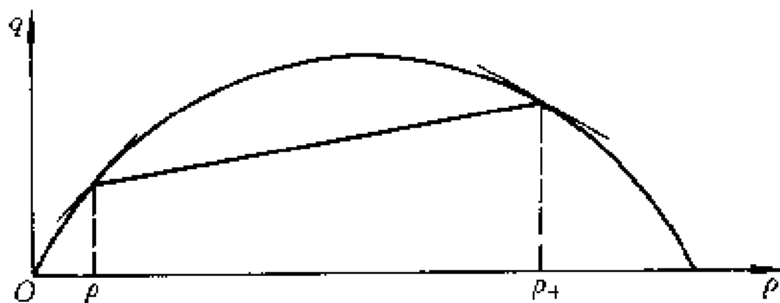


图 5－8

现在我们可以讨论具有激波的初值问题了.如果知道如何在重叠的特征上安置激波，那就可以解初值问题(2.8)、(2.9)了.对给定的初始值函数，可用先前讨论的用特征线求连续解的方法求解.当在某一时空点，例如(x_0, t_0)出现$\partial\rho/\partial x$变为无穷时，求连续解的方法就不能用了.这时在(x_0, t_0)点始发一个激波，激波在始发点的斜率是该点特征的斜率，从(x_0, t_0)点积分

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sigma=\frac{q_+-q_-}{\rho_+-\rho_-}=\frac{q(f(\xi_+))-q(f(\xi_-))}{f(\xi_+)-f(\xi_-)},$$

这里f是已知的初值函数，$\xi_+(x,t)$、$\xi_-(x,t)$分别是过激波上点(x,t)的右、左特征线在$t=0$时的横坐标(x坐标).为了得到激波曲线，当激波不太强时，经常用一个近似方法：先将激波速度σ用激波强度$\eta=\rho_+-\rho_-$作Taylor展开：

$$\begin{aligned}\sigma&=\frac{q_+-q_-}{\rho_+-\rho_-}\\&=\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\rho}\right)_-+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}\rho^2}\right)_+\eta+O(\eta^2)\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{dq}{d\rho}\right)_- -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2q}{d\rho^2}\right)_-\eta+O(\eta^2).$$

两式相加得

$$2\sigma=\left[\left(\frac{dq}{d\rho}\right)_+ +\left(\frac{dq}{d\rho}\right)_-\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2q}{d\rho^2}\right)_+ -\left(\frac{d^2q}{d\rho^2}\right)_-\right]\eta+O(\eta^2).$$

再将上式右边第二项用η展开，于是得到

$$\sigma=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dq}{d\rho}\right)_+ +\left(\frac{dq}{d\rho}\right)_-\right]+O(\eta^2).$$

这表示对不太强的激波，在二阶精度内，激波速度为左、右特征速度的平均.如果q是ρ的二次函数，那么上述结论就是精确的了.

根据上面讲的，我们就可以得到一个求xt平面上流动的较简单的方法:

1° 由x轴上每一点$(x_\rho,0)$作特征线，其斜率为

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d\rho}{dq}=a(f(x_\rho))^{-1},$$

每条特征线上都带着一个ρ值($\rho=f(x_\rho)$);

2° 记下特征线相交叉的区域;

3° 由特征线开始相交的每一点(x_i,t_i)始发一激波;

4° 从每点(x_i,t_i)开始积分激波曲线的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=g(x,t),$$

其中$g(x,t)=\frac{1}{2}(a_++a_-)$，这个$g(x,t)$是激波速度$\sigma$的一个好的近似.

这样得到的具有激波的解，对激波曲线上的每一点，显然有$a(\rho_+)>a(\rho_-)$. 由于$a'(\rho)<0$，因此有$\rho_->\rho_+$，即是满足熵条件(2.18)的.

§3. 一维气体动力学

3.1 流动的一般方程.热力学概念

本节将要讨论的问题与流体动力学方程的一般结构有密切关系.这些方程完全表征了流体的光滑运动,它们是由下列物理规律导出的:

1. 质量守恒原理;
2. 动量守恒定律;
3. 能量守恒定律(或状态绝热变化条件);
4. 热状态方程.

这些方程和相应的初边值条件一起决定一个特定的流动状态.在第四章中由这些物理规律导出了支配流体运动的一般方程,即第四章中(4.2)、(4.4)和(4.9)式.对可压缩理想气体,这些方程可化为第四章中(5.27)、(5.28)和(5.29)式,即

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho=0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{F}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=-\frac{p}{\rho}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}), \tag{3.3}$$

其中ρ、p、e、$\boldsymbol{v}$分别为流体的密度,压力,比内能和速度,$\boldsymbol{F}$为外力.

由于气体动力学与热力学概念完全交织在一起,因而在这里我们要以适当的形式引进一些热力学的基本概念.

在每一时刻,流体介质中每一点都存在一个由压力p,温度T,密度ρ(或比体积$\tau=\dfrac{1}{\rho}$),比熵S,比内能e所定义的(热力学平衡的)确定状态.由热力学知,对任何给定介质,这些参量中只有两个是独立的.在流体的流动理论中常常将这些量看成是S和ρ(或τ)的函

数，于是压力p可表示为

$$p=f(\rho,S)\ \text{或}\ p=g(\tau,S). \tag{3.4}$$

我们称上面的方程为介质的热状态方程．

所有的实际介质都有一个基本的特性：在熵保持不变的情况下，压力随密度的增加而增加，即有

$$f_\rho(\rho,S)>0,g_\tau(\tau,S)<0. \tag{3.5}$$

由上式我们可以定义一个具有速度量纲的正量：

$$c^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=f_\rho(\rho,S),\quad c^2=-\tau^2 g_\tau(\tau,S). \tag{3.6}$$

我们称这个重要的量c为声速．

对于任何S值，函数$g(\tau,S)$一般是向下凸的，因此，我们还假定

$$g_{\tau\tau}(\tau,S)>0. \tag{3.7}$$

我们再加一个假定

$$g_S(\tau,S)>0. \tag{3.8}$$

当流体介质从一个状态变到另一状态时，所获得的内能等於介质所吸收的热量与压力对介质所作的压缩功之和，即当介质从一个状态变到另一状态时有

$$\mathrm{d}e=T\mathrm{d}S-p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{3.9}$$

对可逆过程$T\mathrm{d}S$就是通过热传导所获得的热量，对不可逆过程，$T\mathrm{d}S$大于所得热量．

用(3.1)式可将(3.3)写为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-\frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0. \tag{3.10}$$

由热力学关系(3.9)，于是可得到

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0. \tag{3.11}$$

这就是说，对连续流动，质点的熵是保持不变的．满足关系式(3.11)的流动通常称为绝热的．由此可以推得，如果初始时流动是匀熵

的，只要流动是连续的，熵就是常数，$p=f(\rho)$. 这样的流动我们称为等熵流．

3.2 一维不定常流，简单波

对一维等熵流动，体力$F=0$时方程(3.1)、(3.2)可简化为

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ u_t + uu_x = -\dfrac{1}{\rho}p_x. \end{cases} \tag{3.12}$$

状态方程为

$$p=p(\rho). \tag{3.13}$$

利用(3.6)可将(3.12)的第二个方程改写为

$$u_t + uu_x = -c^2\rho_x/\rho.$$

对等熵流，声速c只是ρ的函数.

现在我们可以解释为什么将(3.6)定义的c称为声速. 如果考虑在静止气体中由于密度变化引起的等熵的小扰动运动. 即$S=S_0$，$\rho=\rho_0+\rho^{(1)}$，$u=u^{(1)}$，其中$\rho^{(1)}$，$u^{(1)}$是小量，S_0，ρ_0是常数. 将ρ，u代入方程(3.12)，忽略$\rho^{(1)}$，$u^{(1)}$的高阶项，得到线性方程组

$$\begin{cases} \rho_t^{(1)} + \rho_0 u_x^{(1)} = 0, \\ \rho_0 u_t^{(1)} = -c_0^2\rho_x^{(1)}. \end{cases}$$

其中$c_0^2=c^2(\rho_0)=\dfrac{\mathrm{d}p(\rho_0)}{\mathrm{d}\rho}$，消去$u^{(1)}$，得到

$$\rho_{tt}^{(1)}=c_0^2\rho_{xx}^{(1)}.$$

这是熟知的小扰动$\rho^{(1)}$的波动方程，这就是说小扰动("声波")以声速c_0传播.

我们知道任一可微函数$f(x,y)$的两个一阶偏微商的线性组合af_x+bf_y是表示f沿$\mathrm{d}x:\mathrm{d}y=a:b$方向的微商. 在方程组(3.12)的每个方程中，$\rho$，$u$是沿着两个不同方向微分的. 我们现在求(3.12)两方程的某种线性组合，使得组合后的微分表达式中ρ，u的微商组合是沿同一方向的微分. 这个依赖于点x、t和在此点的ρ、u值的方向称

为特征方向.

现在考虑(3.12)中两方程的线性组合

$$u_t+(u+\lambda\rho)u_x+\lambda\rho_t+\left(\lambda u+\frac{c^2}{\rho}\right)\rho_x=0.$$

当上式中 u、ρ 的微商组合是在同一方向 (t_σ, x_σ) 上的微商时, (t_σ, x_σ) 显然应满足

$$x_\sigma=(u+\lambda\rho)t_\sigma, \quad \lambda x_\sigma=\left(\lambda u+\frac{c^2}{\rho}\right)t_\sigma.$$

由此得到

$$\lambda^2=c^2/\rho^2.$$

因此有两个特征方向

$$x_\alpha=(u+c)t_\alpha, \quad x_\beta=(u-c)t_\beta.$$

对(3.12)的一个确定的解 $u(x,t)$、$\rho(x,t)$, 方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\pm c$ 就在 xt 平面上确定了两族单参数的特征曲线,或称特征线:

$$C_+: \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+c,$$

$$C_-: \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-c,$$

于是沿两族特征线有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{c}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0 \qquad 沿 C_+,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\frac{c}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0 \qquad 沿 C_-.$$

积分这两个方程,我们得到

$$r\equiv l(\rho)+u=常数, \quad 沿 C_+,$$

$$s=l(\rho)-u=常数, \quad 沿 C_-.$$

这里

$$l(\rho)=\int^{\rho}\frac{c}{\rho}\,\mathrm{d}\rho. \tag{3.14}$$

量$l(\rho)\pm u$称为Riemann不变量.这就意味着，对方程组(3.12)，特征线C_+和C_-在$u\rho$平面上的映象Γ_+和Γ_-是两族不依赖于所考虑解的曲线.我们称之为$u\rho$平面上的特征曲线.

对xt平面上的区域D内的解，我们可以区别为三种类型，第一种，在D内$\rho=\rho_0=$常数，$u=u_0=$常数，这时我们说流动具有常状态.这时区域D在$u\rho$平面上的映象是一个点(u_0,ρ_0).第二种，在整个D中$r=r_0=$常数，(或$s=s_0=$常数).这时区域D在$u\rho$平面上的映象是一条Γ_+特征线(或Γ_-特征线).第三种是r，s都不是常数的一般流动.下面我们讨论属于第二种情况的解.

如果流动有一个Riemann不变量处处是常数，这种解称为简单波.由于从常状态区域中穿越出来的一类特征线全都携带着一个常数Riemann不变量，因此与常状态区域毗邻的区域总是简单波区域.

为了说明简单波是如何产生的，我们考虑一个一维流动模型：一沿x轴延伸的长管中的气体流动.初始时气体是静止的，且具有均匀密度ρ_0，气体的运动是由管端的活塞运动而引起的.设活塞在充满气体的管道的左端，其坐标在$t=0$时是$x=0$.在$t=0$，$x\geqslant0$中气体的状态是速度$u=0$，声速c_0(或$\rho=\rho_0$)和熵$S=S_0$.活塞的运

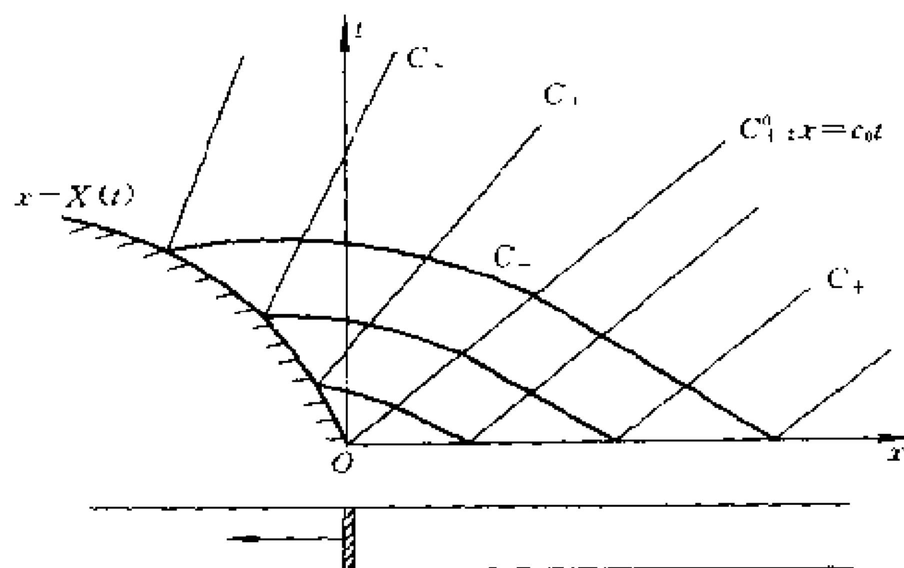


图 5-9

动在xt平面上用一条自坐标原点开始的曲线$x=X(t)$表示，即活塞的轨迹.显然活塞的轨迹本身也是一条流体质点的轨迹.

因为$u-c<u$，C_-特征都是从均匀流区域中的x轴上发出的(见图5-9).沿每条C_-特征线都有

$$l(\rho)-u=\text{常数}. \tag{3.15}$$

因为在$t=0$，$x\geqslant 0$有$u=0$，$\rho=\rho_0$，因此这个常数为$l(\rho_0)$，又对每条C_-特征线，这个常数是相同的.因此，Riemann不变量$l(\rho)-u$处处为常数.现在可以利用另一类特征线定出诸流动变量.

沿由x轴上发出的特征线C_+有

$$l(\rho)+u=l(\rho_0). \tag{3.16}$$

由这些C_+特征线所覆盖的区域中有$u=0$，$c=c_0$.令C_+^0为从x轴上发出的C_+特征线和从活塞上发出的C_+特征线的分界特征线

$$C_+^0:\quad x=c_0t.$$

因为流动在ρu平面上的象全在曲线$l(\rho)-u=l(\rho_0)$上，这条曲线上的每一点对应于流动区域中的一条曲线.实际上，沿每条自活塞上发出的C_-特征线：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+c$，有$l(\rho)+u=$常数.又，由于(3.15)处处成立，于是沿每条$C_+$特征线有$u$、$\rho$是常数.因此沿每条$C_+$特征线有$u+c=$常数，这就是说$C_+$特征线是直线，以后我们称(3.15)处处成立的简单波为前向简单波，而(3.16)处处成立的波为后向简单波.为了完全确定问题的解，我们要用活塞上给定的边界条件.如果活塞轨迹是$x=X(t)$，那么边界条件为

$$u=\dot{X}(t),\qquad \text{在}x=X(t)\text{上}.$$

利用这个边界条件可以得到简单波区域中的解：

$$x=(\dot{X}(t^*)+c)(t-t^*),$$
$$u=\dot{X}(t^*).$$

一个有特殊意义的情况是，活塞瞬时地加速到以一常速度$-V$后退.这时组成简单波的C_+特征线族退化为一束过原点($x=0$，$t=0$)的直线，这种简单波称为中心简单波.这时在活塞附

近有一个$u=-V$, $c=c^*(\rho=\rho^*)$的常数流动区域，这里ρ^*由$-V-l(\rho^*)=-l(\rho_0)$定出. 初始未扰动区域向这个区域的过渡是通过如图5-10所示的中心特征线扇形，在这扇形区域中所有C_+特征线交于原点$x=0$、$t=0$. 对这个区域可以用

$$u+c(\rho)=\frac{x}{t},$$

$$u-l(\rho)=-l(\rho_0)$$

定出解$u=u\left(\frac{x}{t}\right)$、$\rho=\rho\left(\frac{x}{t}\right)$. 这样一个解在中心点$x=0$、$t=0$处，量$u$、$\rho$是不连续的，但是在以后的运动中这种间断立即被平滑掉. 这里我们得到了一个初始间断立即分解为连续流动的典型例子.

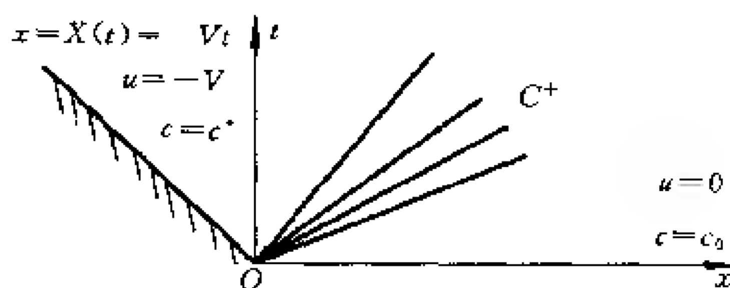


图 5-10

因为C_+特征是直线，可以证明其斜率$\frac{dx}{dt}$随u增加而增加. 实际上由(3.14)和(3.15)我们有

$$\frac{d(u+c)}{du}=\frac{d(l(\rho)+c)}{dl(\rho)}=\frac{d(\rho c)}{cd\rho}>0.$$

这个不等式是根据(3.6)、(3.7)得到的. 由(3.15)和$dl/d\rho>0$、$dp/d\rho>0$(由(3.5))，可以看出，质点穿越前向简单波时，其压力变化和速度变化有相同的方向. 穿越后向简单波时则是相反的. 如果气体质点穿越简单波时压力、密度减少，我们称这种简单波为稀疏波，反之称为压缩波.

如果活塞是加速推向气体，即对任何t^*有$\ddot{X}(t^*)>0$，那么由活

塞加速推进所产生的压缩波的直特征线将会彼此相交.这时流动就不可能保持连续了，将形成激波．当流动中出现激波时，我们要重新审查熵为常数和Riemann不变量为常数的论证.但对$\ddot{X}(t)\leqslant 0$的情况，活塞问题是完全可解的.

3.3 激波过渡

在上段中我们看到初始间断有时会被平滑掉;而在另外的情况下，完全连续的流动，却不能保持永远连续，而会出现间断.例如，对上面讨论的活塞问题，当$\ddot{X}(t)>0$时，即使活塞的这个加速度非常小，也终将导致诸流动变量发生间断.

为了讨论具有间断的流动，我们首先要推导通过间断应满足的跳跃条件，再利用这些关系式讨论激波过渡的一些基本性质.

对一维不定常流动，方程(3.1)－(3.3)可以改写成

$$
\begin{aligned}
&\rho_t+(\rho u)_x=0,\\
&(\rho u)_t+(\rho u^2+p)_x=0,\\
&\left(\frac{\rho u^2}{2}+\rho e\right)_t+\left(u\left(\frac{\rho u^2}{2}+\rho e+p\right)\right)_x=0.
\end{aligned}
$$

如果流动在$x=\xi(t)$上发生间断，那么由第四章§5引理7可导出下列在间断线上满足的跳跃条件:

$$
\begin{aligned}
&-U[\rho]+[\rho u]=0,\\
&-U[\rho u]+[\rho u^2+p]=0,\\
&-U\left[\frac{\rho u^2}{2}+\rho e\right]+\left[u\left(\frac{\rho u^2}{2}+\rho e+p\right)\right]=0.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

这里[·]表示间断跳量，$U=\dot{\xi}(t)$是间断线的运动速度.为了方便，我们引入气体相对于间断线的速度v:

$$v_i=u_i-U\qquad(i=0,1).$$

下标$i=0,1$分别表示间断的两边.于是(3.17)可改写成

$$\rho_0v_0=\rho_1v_1=m,\tag{3.18}$$

$$\rho_0v_0^2+p_0=\rho_1v_1^2+p_1,\tag{3.19}$$

$$\frac{v_0^2}{2}+e_0+p_0\tau_0=\frac{v_1^2}{2}+e_1+p_1\tau_1. \tag{3.20}$$

根据热力学第二定律，当质点穿过间断应满足熵增加条件(假定流体质点是由(0)穿过间断到达(1)):

$$mS_0\leqslant mS_1\quad (S_0\leqslant S_1). \tag{3.21}$$

若$m=0$，这种间断被称为接触间断，这时没有质量通过间断，于是有$v_0=v_1=0$(或$u_0=u_1=U$)，由(3.19)有$p_1=p_0$，且能量关系(3.20)是自动满足的.对一维流动，穿过间断时，速度是连续的.但在高维流动中通过间断时，法向速度是连续的，而切向速度可以有任意的间断.因此，接触间断有时亦称为切向间断(或滑移面).

若$m\neq 0$，即有质量穿过间断，我们称这种间断为激波阵面.

在大多数的理论和实际应用中，都假定气体是多方的，即$p=A(S)\rho^{\gamma}$，$\ln A(S)=S/c_V$，这里γ称为多方指数(对空气$\gamma=1.40$)，c_V是定容比热.对多方气体还有下列关系式

$$c^2=\frac{\gamma p}{\rho},\quad e=\frac{p\tau}{\gamma-1}=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}.$$

我们引入一个表示激波强度的参数:

$$z=\frac{p_1-p_0}{p_0}.$$

对多方气体，可将关系式(3.18)—(3.20)改写成

$$|u_1-u_0|/c_0=z\gamma^{-1}\left[1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z\right]^{-1/2}, \tag{3.22}$$

$$\rho_1/\rho_0=\left[1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z\right]\left[1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}z\right]^{-1}, \tag{3.23}$$

$$c_1^2/c_0^2=(1+z)\left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}z\right)\left[1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z\right]^{-1} \tag{3.24}$$

及

$$v_0^2/c_0^2=1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z. \tag{3.25}$$

现在我们导出满足熵条件的激波过渡具有的一些基本性质.

对多方气体, $S=c_V\ln A=c_V\ln(p\rho^{-\gamma})$, 于是可以得到

$$\frac{S_1-S_0}{c_V}=\ln\left[\frac{(1+z)\left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}z\right)^{\gamma}}{\left(1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z\right)^{\gamma}}\right]. \tag{3.26}$$

穿过激波要求满足熵条件$S_1-S_0>0$. 由(3.26)容易推出$z>0$, 即$p_1>p_0$. 于是从(3.23)、(3.24)得到

$$\rho_1>\rho_0,\qquad c_1>c_0. \tag{3.27}$$

利用(3.18)、(3.19)及熵条件, 我们有

$$v_1v_0=\frac{p_1-p_0}{\rho_1-\rho_0}=\frac{A(S_1)\rho_1^{\gamma}-A(S_0)\rho_0^{\gamma}}{\rho_1-\rho_0}>\frac{A(S_0)(\rho_1^{\gamma}-\rho_0^{\gamma})}{\rho_1-\rho_0}$$

$$=\gamma A(S_0)\rho_*^{\gamma-1}>\gamma A(S_0)\rho_0^{\gamma-1}=c^2(\rho_0,S_0)=c_0^2.$$

这里ρ_*是ρ_0与ρ_1之间适当选取的中间值.所以

$$v_0v_1>c_0^2. \tag{3.28}$$

由(3.18)和(3.27)就导致$|v_0|>|v_1|$.于是我们得到了所要的关系式

$$|v_0|>c_0. \tag{3.29}$$

用同样的方法, 我们可以证明

$$|v_1|<c_1. \tag{3.30}$$

于是, 我们证明了: 对多方气体, 满足熵条件时, 激波总是压缩的. 更确切地说: 穿过激波阵面时密度和压力都增加. 相对激波而言, 流动速度在波前为超声速的, 在波后为亚声速的. 应该指出, 对一般气体, 只要满足假定(3.5)—(3.9), 上面的结论都是成立的.

作为一个可用上面的诸激波关系式精确求解的例子, 我们考虑一激波在固壁面上的反射问题. 一个后边状态为常速度u_1的激波阵面冲撞到一固壁上, 并从壁面上被反射, 我们求解反射后的压力.

令下标0, 1分别表示入射激波前后的状态, 这时状态(0)是由$u_0=0$, p_0, ρ_0, c_0所表征的静止区域, 下标2表示反射波后的状态(参看图5-11).

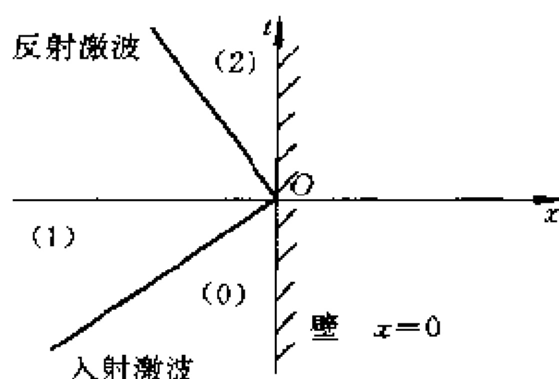


图 5－11

若入射波强度$z_I=(p_1-p_0)/p_0$．于是可利用(3.22)、(3.25)决定入射波后的状态(1)．令$z_R=(p_2-p_1)/p_1$为反射波强度，由于反射波是和入射波运动方向相反，适当的改变公式中的符号，由(3.22)有

$$\left|\frac{u_1-u_2}{c_1}\right|=\frac{z_R}{\gamma\left[1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z_R\right]^{1/2}}.$$

在壁面邻近的区域中，气体必定是静止的，于是有$u_2=u_0=0$．现在将u_1，c_1用z_R表示出．于是由$\frac{|u_1|}{c_1}=\frac{c_0}{c_1}\cdot\frac{|u_1-u_0|}{c_0}$得到关系式：

$$\frac{z_I}{\gamma\left[\left(1+z_I\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}z_I\right)\right]^{1/2}}=\frac{z_R}{\gamma\left[1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}z_R\right]^{1/2}}.$$

这是z_R的一个二次方程，容易看出，它的解是

$$z_R=z_I/\left[1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}z_I\right].$$

这是反射的一个基本公式．我们知道线性波产生的"声波"反射，超压比$(p_2-p_0)/(p_1-p_0)=2$，这表明声波反射后超压只增加一倍．而对于激波则是一种完全不同的情况，对一个弱的入射波$z_I\to 0$，于是近似地有$z_R\sim z_I$，因此

$$p_2-p_0\approx 2(p_1-p_0).$$

这和声波反射的情况相一致. 但对强激波$z_I \to \infty$，这时有$z_R = 2\gamma/(\gamma-1)$，因此

$$p_2/p_1 \sim (3\gamma-1)/(\gamma-1) = 8 \quad (对\gamma=1.4).$$

这表明强激波反射后在壁面的压力显著地增大. 显然，这是一个有重要意义的事实.

3.4 Hugoniot 曲线，激波的确定性

为了后面讨论Riemann问题，我们还需对激波上的关系式作一些进一步的讨论. 为此我们推导对激波的Hugoniot关系式. 由(3.18)和(3.19)可得到

$$\tau_0(p_0-p_1) = v_0(v_1-v_0),$$
$$\tau_1(p_0-p_1) = v_1(v_1-v_0).$$

将两式相加，于是有

$$(\tau_0+\tau_1)(p_1-p_0) = v_0^2 - v_1^2. \tag{3.31}$$

利用(3.31)，关系式(3.20)可改写为

$$\frac{1}{2}(\tau_0-\tau_1)(p_1+p_0) = e_1-e_0. \tag{3.32}$$

此式可以解释为：穿过激波阵面时内能的增加是由于进行压缩时平均压力所作的功造成的. 关系式(3.32)只含热力学量，而与速度无关，因此特别有用. 它是由Hugoniot首先导出的，因此被称为Hugoniot关系式.

如果将p、τ作为独立变量，而将e、S都看成是p、τ的函数，我们可定义一个Hugoniot函数：

$$H(\tau,p) = e(\tau,p) - e(\tau_0,p_0) + (\tau_1-\tau_0)(p+p_0)/2.$$

对给定的(τ_0,p_0)，τp平面上满足$H(\tau,p)=0$的点组成的曲线称为具有中心(τ_0,p_0)的Hugoniot曲线. 当激波阵面一边的值(τ_0,p_0)给定时，激波阵面另一边与三个激波关系式(3.18)—(3.20)相容的所有(τ,p)值全落在这条曲线上. 正如下面将要看到的，Hugoniot曲线上$p>p_0$部分表示(τ_0,p_0)为波前状态时，所有可能的后边状

态.$p<p_0$部分则表示(τ_0,p_0)为后边状态时所有可能的前边状态.由于这条曲线与速度无关,因此用它来讨论激波过渡非常方便.

对多方气体,我们有

$$e=\frac{p\tau}{(\gamma-1)}=\frac{(1-\mu^2)}{2\mu^2}p\tau,$$

这里$\mu^2=(\gamma-1)/(\gamma+1)$.于是

$$2\mu^2H(\tau,p)=(\tau-\mu^2\tau_0)p-(\tau_0-\mu^2\tau)p_0.$$

容易看出,以(τ_0,p_0)为中心的Hugoniot曲线是等轴双曲线,它具有左渐近线(参看图5-12)

$$\tau=\mu^2\tau_0=\tau_{min}>0.$$

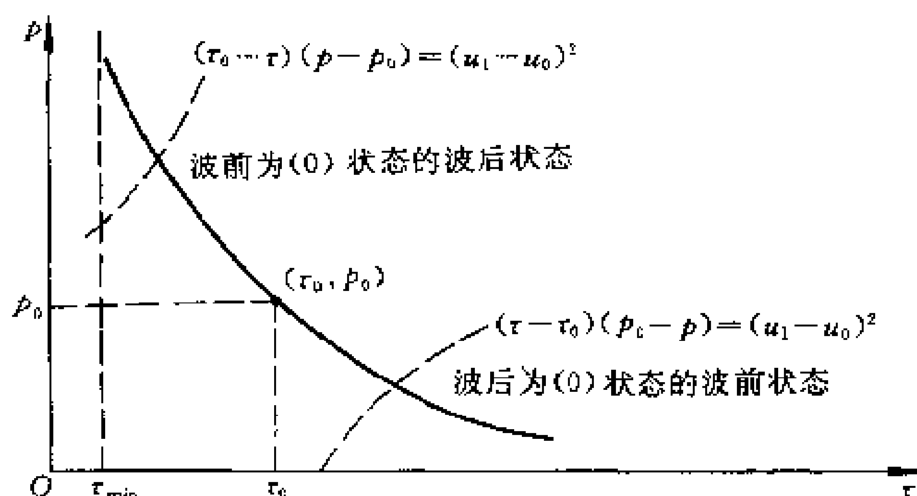


图5-12

在研究哪些数据确定激波过渡时,Hugoniot曲线非常有用.下面我们将看到在(关于Hugoniot曲线)很宽的条件下,下列结论成立:

1. 给定激波阵面的一边的状态(0)(即(τ_0,p_0)已知)和激波速度U,就决定了激波阵面另一边的整个状态(1).

2. 不管状态(0)是激波前还是激波后的状态,给定状态(0)和速度u_1就决定了激波阵面的速度U和整个状态(1).

3. 给定状态(0)和压力p_1,就决定了激波阵面的速度和整个状态(1).

为了证明这些结论，对以(τ_0,p_0)为中心的Hugoniot曲线作如下的假定：

(H_1)　沿Hugoniot曲线，当压力由零变到无穷时，τ值在有限值τ_{max}和τ_{min}间变化；

(H_2)　Hugoniot曲线是严格下降的，即沿曲线有$dp/d\tau<0$，且在(τ_0,p_0)点处有$d^2p/d\tau^2>0$；

(H_3)　每一条过中心(τ_0,p_0)的射线，只要它与τ轴的交点$\tau\leqslant\tau_{max}$，则射线与Hugoniot曲线只交于一点.

对于多方气体，上面三个条件显然都满足.

现在我们证明结论1—3，当然这里还需假定，气体通过激波，压力是增加的.由激波上的关系式(3.18)和(3.19)有

$$-m^2=-\rho_0^2v_0^2=\frac{p_1-p_0}{\tau_1-\tau_0}. \tag{3.33}$$

为了定出τ_1、p_1，只需过(τ_0,p_0)以$-m^2$为斜率作直线.由(H_3)知，它与Hugoniot曲线只有一个交点.此交点就是要求的(τ_1,p_1).速度u_1可以由(3.18)定出，$u_1=U-m\tau_1$.结论1证毕.

为了得到第二个结论，我们利用(3.18)和(3.19)，容易得到

$$-(\tau_0-\tau_1)(p_0-p_1)=(v_1-v_0)^2. \tag{3.34}$$

由已知数据给出了右端项$(v_1-v_0)^2=(u_1-u_0)^2$.为了确定(τ_1,p_1)，只需求双曲线

$$(\tau_0-\tau)(p_0-p)=-(v_1-v_0)^2$$

和Hugoniot曲线的交点.双曲线的斜率是$m^2>0$.于是由(H_2)知这样的交点有两个.这两点对应于状态(0)是在激波的前边还是后边两种可能情况(参看图5-12).激波速度U和状态(1)容易由激波跳跃条件定出.

对于第三个结论，由于状态(0)和p_1已知，由假定(H_1)和(H_3)就保证了有一个且只有一个τ_1满足$H(\tau_1,p_1)=0$.状态(1)的其余的流动变量于是可以用与前面基本相同的方法求得.

3.5 Riemann问题

现在我们讨论在理论上和实用上都很重要的Riemann问题: 即求解由这样一种初始状态所引起的流动，初始时，右边($x>0$)气体处于给定的常数状态(r): u_r, p_r, ρ_r; 左边气体($x<0$)处于给定的常数状态(l): u_l, p_l, ρ_l，这两个状态在这里被看成是无关的. 这初始值问题的特殊情况: $u_r=u_l=0$，被称为激波管问题.

本节的主要目的是讨论如何求解Riemann问题，以及如何用Riemann问题的解去构造一般初值问题的解. 不失一般性，我们不妨假定$p_r<p_l$, $u_r=0$.

为了求解Riemann问题，我们首先定义状态(τ_r, p_r)的后边状态，或g_r曲线: 它由两支组成，它的$\tau<\tau_r$的上半支是Hugoniot曲线，它是当(r)为波前状态时通过一个激波可以达到的所有后边状态的迹线; 而$\tau>\tau_r$的下半支是等熵(绝热)曲线，例如对多方气体，即为$p\tau$ =常数，下半支是对应于一个从(τ_r, p_r)开始的中心稀疏波，在其上有$u-l(p)=u_r-l(p_r)$为常数(参看2.2段).

g_r曲线上的任意一点，就确定了从(τ_r, p_r)经过一个激波或一个稀疏波到此点所表示的状态的唯一的过渡. 由于(τ_r, p_r)在右边，因此质点是从右边进入激波(或稀疏波)的，这种质点从右边进入波区的称为前向波.

类似地，可用同样的方法定义(τ_l, p_l)的后边状态，或(τ_l, p_l)的g_l曲线. 曲线上的一点，确定了从(τ_l, p_l)经过一个激波或一个稀疏波到此点所表示的状态的过渡. 这时质点是从左边进入波中，所穿过的波是后向的.

我们再用$p=$常数定义一个从(τ_r, p_r)的g_r曲线到(τ_l, p_l)的g_l曲线的映射. 容易看出g曲线是单调的，因此这个映射是可逆的. 若τ在(τ_r, p_r)的g_r曲线上，映射可表示成$\bar{\tau}(\tau)$. 当τ在(τ_l, p_l)的g_l曲线上时，则用τ^{-1}表示其逆(参看图5-13).

现在我们说明一状态(τ_l, p_l)可以经过一个左中心波、一个常

数状态(b)，一个接触间断面，一个常数状态(a)和一个右中心波过渡到状态(τ_r, p_r)(参看图5－14).这里中心波是指由原点$x=0, t=0$发出的中心等熵稀疏波或激波.

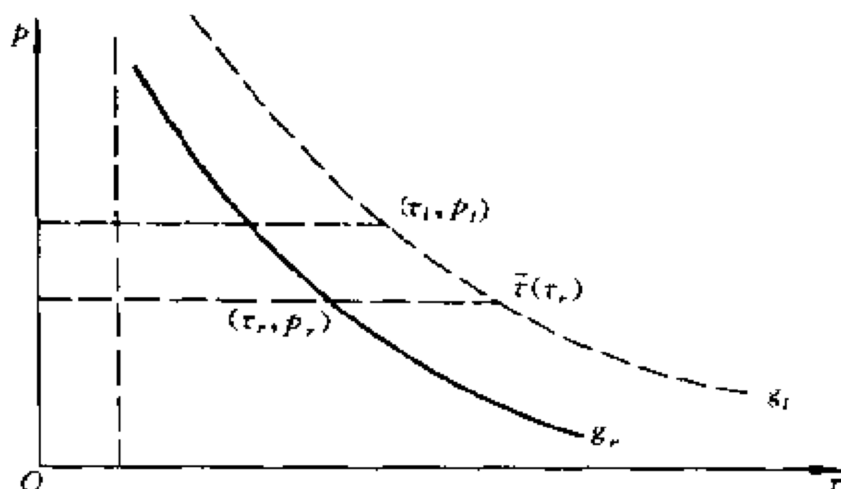


图 5－13

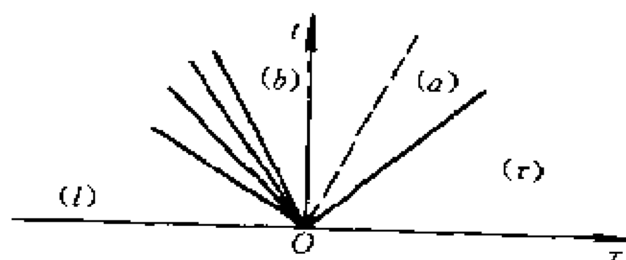


图 5－14

我们在τp平面上来求这个解.两个中间状态(b)和(a)，它们分别为状态(l)和(r)的后边状态，即分别对应于g_l和g_r上的两个点.又，它们是由一个接触间断J相联接，在τp平面上接触间断可用水平线$p=$常数表示，且两中间状态(a),(b)的速度必须相同.对右边的中间状态(a)，由激波条件有

$$u_a-u_r=[(p_r-p_a)(\tau_a-\tau_r)]^{1/2}$$

(这里$u_r=0$)，或由稀疏波公式有

$$u_a=\quad l_r(\tau_r)+l_r(\tau_a).$$

而对左边的中间状态(b)有

$$u_b - u_l = -[(p_l - p_b)(\tau_b - \tau_l)]^{1/2}$$

或

$$u_b - u_l = l_l(\tau_l) - l_l(\tau_b).$$

我们注意到这些公式在$\tau_a = \tau_r$和$\tau_b = \tau_l$处是连续的.而且我们还注意到不能在中间状态间再"插入"激波或稀疏波，因为不能匹配速度使之满足各波上的关系.

为了求解Riemann问题，我们只须证明：总能找到一水平线段，使它与两g曲线的交点处的u值是相同的.

对$p\to\infty$，水平线与两g曲线的那些交点是在g曲线的激波部分，两个τ值分别趋于它们的最小值，而g_l曲线上和g_r曲线上u值之差满足

$$\tilde{u}_l - \tilde{u}_r \longrightarrow -\infty.$$

另一方面，当$\tau\to\infty$(或$\rho\to 0$)时，直线$p=$常数交两g曲线的稀疏波部分.又

$$l = \int_0^\rho \frac{c}{\rho}\mathrm{d}\rho,$$

因此，$l_r(\tau)$和$l_l(\tau)$都趋于零，于是有

$$\tilde{u}_l - \tilde{u}_r \to u_l + l_l(\tau_l) + l_r(\tau_r).$$

若

$$u_l + l_l(\tau_l) + l_r(\tau_r) > 0,$$

则总有一个解$u_a - u_b = 0$，若

$$u_l + l_l(\tau_l) + l_r(\tau_r) < 0,$$

我们将有两个把气体密度稀疏到零的完全稀疏波，在这两波中间有一$\rho=0$的空腔.

因此，每一个Riemann问题都是可解的.解的结构情况如下：

i) 若u_l在区间

$$[-l_l(\tau_l) + l_l(\tau(\tau_r)), \{(p_r - p(\tilde{\tau}^{-1}(\tau_l)))(\tilde{\tau}^{-1}(\tau_l) - \tau_r)\}^{1/2}]$$

中，我们有一向左的稀疏波和一向右的激波.因为$\tilde{\tau}(\tau_r) < \tau_l$，因此

这种情况还包括$u_l<0$的情况.

ii) 若u_l在区间

$$[-l_l(\tau_l)-l_r(\tau_r),\ l_l(\bar{\tau}(\tau_r))-l_l(\tau_l)]$$

中,则为两个稀疏波,可能有空腔($\rho=0$的区域).

iii) 若

$$u_l>\{[p_r-p(\bar{\tau}^{-1}(\tau_l))](\bar{\tau}^{-1}(\tau_l)-\tau_l)\}^{1/2},$$

则为两个激波.

初值问题的解.对一般的初值问题,Godunov最先提出用下列方法求解:将初值近似地看成分段常数,然后求解一组Riemann问题,每个这样的Riemann问题的解称为一个扇形解.例如我们将x轴分成长为h的一系列区间$[ih,(i+1)h]$,$i=0,\pm1,\pm2,\cdots$,将每个区间上的初值近似地当作常数.于是,对每个相邻的两区间,可解一Riemann问题,这个解可以一直推进到时刻Δt.Δt满足条件$\Delta t/h<1/(2s)$,这里s是所出现的最大激波速度或稀疏波速度.为了对下一时刻t的推进,必须仍用分段常数值代替上一步得到的解值.为此,就须选取这些分段常数值.结果证明必须在每个区间上取一随机点,用这随机点上前一步得到的解值代替这区间上的状态,而后,又可以解一组Riemann问题.

条件$\Delta t/h<1/(2s)$是以保证由每个Riemann问题得到的波不会相互作用.当初值函数的总变差足够小时,可以证明总可以选取时间步长Δt满足这个条件.且当$h\to0$时近似解趋于初值问题的弱解.但并未证明这个弱解满足熵条件.若初值的总变差不是很小,近似解是否收敛也未得到证明,然而数值计算经验似乎表明近似解是收敛到精确解的.

§4. 平面定常流动

4.1 基本方程,速度图方法

二维、定常、无旋、等熵流动也是一种较简单的流动.如果令ρ、

p分别表示流体的密度和压力，它们仅是平面笛卡尔坐标x、y的函数．u、v是速度q沿两坐标轴方向的分量，它们也只是x、y的函数．这时守恒方程(3.1)、(3.2)可写成

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &(\rho u^2)_x + (\rho uv)_y + p_x = 0, \\ &(\rho uv)_x + (\rho v^2)_y + p_y = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

下面我们将限于讨论流动是等熵的情况，即$p = p(\rho)$，$p'(\rho) > 0$．无旋条件表示成

$$u_y - v_x = 0. \tag{4.3}$$

于是动量方程(4.2)可化为

$$uu_x + vu_y + \frac{c^2}{\rho}\rho_x = 0,$$

$$uv_x + vv_y + \frac{c^2}{\rho}\rho_y = 0,$$

其中$c^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho$，$c$是声速．利用(4.3)，上两式还可写成

$$\nabla\left[\frac{u^2+v^2}{2} + \int \frac{c^2}{\rho}\mathrm{d}\rho\right] = 0.$$

于是，可得到Bernoulli方程

$$\frac{1}{2}q^2 + i(\rho) = \frac{1}{2}q_*^2 = \text{常数}, \tag{4.4}$$

其中$i(\rho) = \int \frac{c^2}{\rho}\mathrm{d}\rho$．由(4.4)可看出，速度$q$不能超过$q_*$，且当$\rho \to 0$时，$q \to q^*$．$q^*$是$\rho \to 0$时的极限速度．

对多方气体，(4.4)可写成

$$\mu^2(u^2+v^2) + (1-\mu^2)c^2 = c_*^2 = \mu^2 q_*^2, \tag{4.5}$$

其中$\mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$，而$c_* = \mu q_*$是临界声速．

对平面定常无旋流动，我们只需考虑方程组(4.1)和(4.3)，其中ρ可以作为$q^2 = u^2 + v^2$的函数，由(4.4)给出．

从Bernoulli定律有

$$udu+vdv+\frac{c^2}{\rho}d\rho=0.$$

利用这个关系式可以将质量守恒方程(4.1)写为

$$(c^2-u^2)u_x-uv(u_y+v_x)+(c^2-v^2)v_y=0. \tag{4.6}$$

(4.3)式表示存在一个位势函数$\phi(x,y)$,使得

$$\phi_x=u,\ \phi_y=v.$$

(4.6)可化为一个对ϕ的二阶非线性微分方程

$$(c^2-\phi_x^2)\phi_{xx}-2\phi_x\phi_y\phi_{xy}+(c^2-\phi_y^2)\phi_{yy}=0, \tag{4.7}$$

c是$q^2=u^2+v^2$的已知函数.类似地由(4.1)可以引入一个流函数$\psi(x,y)$使得

$$\psi_x=-\rho v,\psi_y=\rho u.$$

于是,(4.3)亦可化为一个关于ψ的二阶非线性微分方程.

为了方便,我们引入Mach数M:

$$M=q/c.$$

方程(4.7)的特征线满足方程

$$(c^2-u^2)dy^2-2uvdydx+(c^2-v^2)dx^2=0 \tag{4.8}$$

或

$$\frac{dy}{dx}=\frac{uv\pm c^2\sqrt{M^2-1}}{c^2-u^2}. \tag{4.9}$$

方程(4.7)当$M>1$,$M<1$和$M=1$时分别为双曲型、椭圆型和抛物型.三种情况所对应的流动分别为超声速流动、亚声速流动和声速流动.对纯超声速和纯亚声速流动,理论虽不能说是已很完备,但还是研究得较充分的.对一个流动中同时出现$M>1$和$M<1$的区域的情况,被称为跨声速流动.这种混合情况还有许多问题没有解决.

下面我们简单地介绍一种将方程组线性化的方法——速度图方法.

方程(4.3)和(4.6)关于u和v的微商项是线性齐次的,且它们的

系数只依赖于u和v，在这种情况下，对于Jacobi行列式

$$j = v_y u_x - v_x u_y$$

不为零的任何区域，都可以用交换因变量和自变量的地位，而将方程组(4.6)、(4.3)化为一等价的线性方程组. 对方程组(4.3)、(4.6)的一个解$u(x,y)$、$v(x,y)$，如果$j \neq 0$，则可将x、y视为u、v的函数，由

$$u_x = j y_v,\ u_y = -j x_v,\ v_x = -j y_u,\ v_y = j x_u$$

可看出$x(u,v)$、$y(u,v)$满足线性方程

$$x_v - y_u = 0. \qquad (4.10)$$

$$(c^2 - u^2) y_v + uv(x_v + y_u) + (c^2 - v^2) x_u = 0. \qquad (4.11)$$

反之，若Jacobi行列式

$$J = x_u y_v - x_v y_u \neq 0,$$

则(4.10)、(4.11)的一个解$x(u,v)$、$y(u,v)$可导致(4.3)、(4.6)的一个解.

这样一个从xy平面到速度平面uv的转换，常常称为**速度图变换**.

(4.10)表示存在一个函数$\Phi(u,v)$，它使

$$\Phi_u = x,\ \Phi_v = y.$$

于是可将(4.11)化为

$$(c^2 - u^2)\, \Phi_{vv} + 2uv\, \Phi_{uv} + (c^2 - v^2)\, \Phi_{uu} = 0. \qquad (4.12)$$

Φ 和势函数 ϕ 间的关系

$$\Phi = xu + vy - \phi$$

称为 ϕ 的Legendre变换. 类似地，对流函数ψ亦可引进Legendre变换$\Psi(\rho u, \rho v)$:

$$\Psi = \rho u y - \rho v x - \psi(x,y),$$

相应地有

$$\Psi_{\rho u} = y,\ \Psi_{\rho v} = -x.$$

如果在uv平面上某区域中找到(4.12)的一个解$\Phi(u,v)$，且行列式$J = \Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2 = x_u y_v - x_v y_u \neq 0$，它就可以导致一个由$u(x,y)$、$v(x,y)$所给出的流动. 因为方程(4.12)是线性方程，它的解是可以叠加的. 因此一旦找到它的几个解，用叠加方法就可得到

多种形式的解.用这种叠加方法可以得到一些特殊的很有意义的流动图案.

在速度uv平面上,有时利用势函数 ϕ 和流函数ψ是方便的.如果将它们视为u和v的函数,由于

$$\phi_u u_x + \phi_v v_x = u, \qquad \phi_u u_y + \phi_v v_y = v,$$

$$\psi_u u_x + \psi_v v_x = -\rho v, \qquad \psi_u u_y + \psi_v v_y = \rho u,$$

利用这些关系式,从方程(4.3)和(4.6)中消去u_x、u_y、v_x、v_y,于是得到线性方程

$$\begin{aligned} &\rho(v\phi_u - u\phi_v) + (u\psi_u + v\psi_v) = 0, \\ &\rho c^2(u\phi_u + v\phi_v) + (q^2 - c^2)(v\psi_u - u\psi_v) = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

如果在uv平面上引入极坐标(q, θ)

$$u = q\cos\theta, \quad v = q\sin\theta.$$

(4.13)可化为

$$\begin{aligned} &\rho\phi_\theta = q\psi_q, \\ &\rho q\phi_q = \left(\frac{q^2}{c^2} - 1\right)\psi_\theta. \end{aligned} \tag{4.14}$$

对跨声速流动区域,为了方便还可引入下列变换:

$$\sigma = \int_{q_0}^{q} q^{-1}\rho \mathrm{d}q.$$

于是(4.14)可变为

$$\phi_\theta = \psi_\sigma,$$

$$\phi_\sigma = K(\sigma)\psi_\theta,$$

其中

$$K(\sigma) = \frac{1}{\rho^3}\frac{\mathrm{d}(\rho q)}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{\rho^2}\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) \tag{4.15}$$

是只含σ的函数.因此有

$$K(\sigma)\psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0.$$

这方程称为Чаплыгин方程.当$K(\sigma) > 0$时为椭圆型,$K(\sigma) < 0$时为双曲型,它的特征线由

$$\theta = \pm\int_{1}^{\sigma} \sqrt{-K(\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma + 常数 \tag{4.16}$$

给出.

这里要指出的是，虽然速度图方法可以将方程线性化，但由此而得到的便利却被边界条件的复杂化(非线性化)抵消了，例如与xy平面上给定的界壁相对应的uv平面上的边界，是依赖于问题的解的.

4.2　超声速流

当流动是纯超声速流时，如果将变量x(或y)视为"时间"变量，方程组(4.3)、(4.6)就是在§3中讨论过的双曲型方程组.因此同样可解Cauchy问题.这时特征线方程为

$$C_+:\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{uv + c^2\sqrt{M^2-1}}{c^2-u^2} \equiv \zeta_+(u,v),$$

$$C_-:\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{uv - c^2\sqrt{M^2-1}}{c^2-u^2} \equiv \zeta_-(u,v) \tag{4.17}$$

而沿这两族特征线有

$$\Gamma_+:\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -\zeta_-(u,v) \qquad 沿C_+,$$

$$\Gamma_-:\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -\zeta_+(u,v) \qquad 沿C_-. \tag{4.18}$$

对于多方气体，(4.18) 可以直接解出.可以证明对多方气体，uv平面上Γ特征线是外摆线，它由半径为$r=\frac{1}{2}c_*\left(\frac{1}{\mu}-1\right)=\frac{1}{2}(q_*-c_*)$的圆在"声速圆"$u^2+v^2=c_*^2(=\mu^2 q_*^2)$上滚动时其圆周上的点所描出的轨迹.

为了方便，我们看$v=0$的情况，这时质点的轨迹(流线)为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，容易看出流体质点的轨迹与两条特征线$C_\pm$的夹角是相同

的,而且当$M \to 1$时,两条特征线$C_\pm$将彼此相切且与流线垂直.

这里我们同样可以定义Riemann不变量、简单波等,可以解Riemann问题及和活塞问题相类似的问题,其中最为重要的基本流动之一就是绕一弯曲壁面或一尖角的超声速流动.

假定具有常速度$q_0 > c_*$的流动沿直壁一直到达A点(见图5-15),而后沿从A点开始的一光滑曲壁拐弯,过点B继续沿一直壁流动.只要是毗邻一常状态区域,流动就可以用一简单波来描述.一个向内弯的曲壁(图5-15a),将使直特征线形成一个具有尖点的

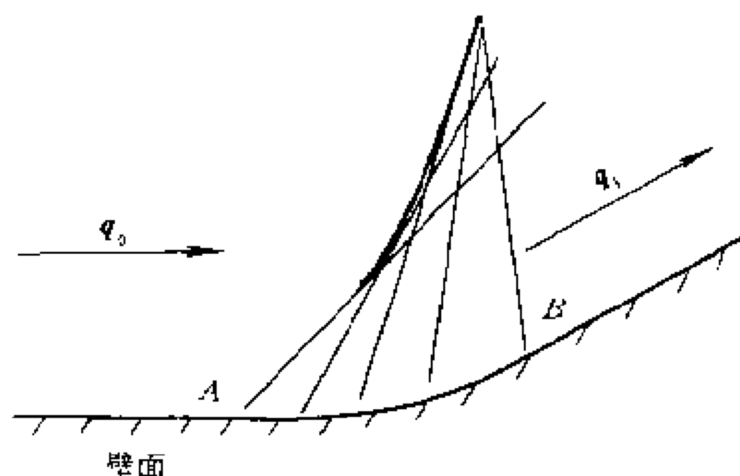


图 5-15a

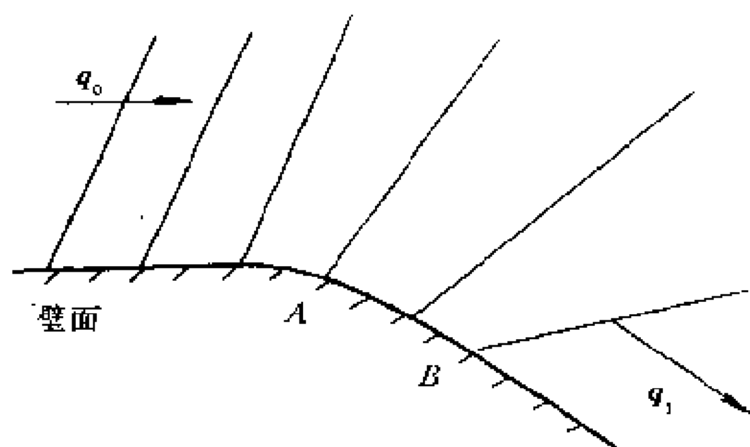


图 5-15b

包络.于是,在包络线的两分支间的区域中,u、v不再是单值的,这种多值状态,物理上是不可能的,实际上,这里将产生一个激波间

断.而绕一个向外弯的曲壁(图5－15b)的流动中有一稀疏波，流动经过稀疏波实现弯曲部分规定的拐弯.如果当绕完这个弯曲部分$\overset{\frown}{AB}$之前，在某一点B_1处，流动已膨胀到零密度和逃逸速度(由Bernoulli定律知这逃逸速度就是q_*)，则在B_1后面的壁面附近将有一密度为零的空穴区.当弯曲段$\overset{\frown}{AB}$收缩为一点时，即曲壁变为一拐角，将得到的是一由拐点出发的直激波或一中心稀疏波(见图5－16).

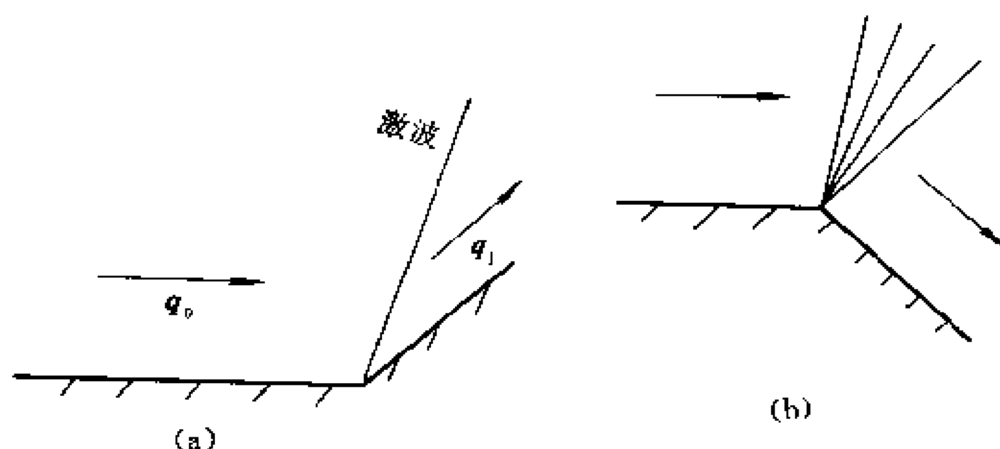


图 5－16

这些问题是容易求解的.我们注意到稀疏波区域在uv平面上的映象是uv平面上的某一段Γ特征线,而激波后可能的状态可以由激波极线给出.

激波极线是可以和一具有$\rho_0=\rho(q_0)$的状态$(q_0,0)$用一激波相联接的所有可能的状态在uv平面上的迹线.为了得到这条极线，由第四章§5引理7及(4.1)、(4.3)，我们将间断条件写成下列形式:

$$[\rho u]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-[\rho v]=0,$$

$$[u]+[v]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

其中$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$是激波线的斜率.若将激波另一边的状态表示

成($q\cos\theta, q\sin\theta$)，于是由上面的间断条件，得到极线

$$q\cos\theta=\frac{\rho q^2+\rho_0 q_0^2}{q_0(\rho+q_0)}. \tag{4.19}$$

现在我们证明，当激波强度趋于零时，激波就变成特征线. 为此我们令$f=\rho q$，由(4.19)得到

$$\cos\theta-1=\frac{(q-q_0)(f-f_0)}{q_0 f+qf_0},$$

或

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2}\frac{(q-q_0)(f-f_0)}{q_0 f+qf_0}.$$

如果激波是弱的，即$\theta\to 0$，$q\to q_0$，于是得到

$$\theta^2=\frac{-2(q-q_0)}{q_0 f+qf_0}\left[\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q}\right)_0(q-q_0)+O((q-q_0)^2)\right],$$

$$\theta\approx\pm(q-q_0)\sqrt{\frac{-2}{q_0 f+qf_0}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q}\right)_0}.$$

当$q\to q_0$时

$$\frac{2}{q_0 f+qf_0}\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q}\longrightarrow\frac{1}{\rho_0 q_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}(\rho q)}{\mathrm{d}q}\right)_0.$$

又由(4.16)知，在$q=q_0$，$\theta=0$处的特征线为

$$\theta=\pm\int_{q_0}^{q}\sqrt{\frac{-1}{\rho^3}\ \frac{\mathrm{d}(\rho q)}{\mathrm{d}q}}\ \mathrm{d}\sigma$$

$$=\pm\int_{q_0}^{q}\sqrt{\frac{-1}{\rho q^2}\ \frac{\mathrm{d}(\rho q)}{\mathrm{d}q}}\ \mathrm{d}q.$$

于是我们证明了，激波强度趋于零时，激波线变成了特征线.

对多方气体，激波极线有如图5－17所示的形状.

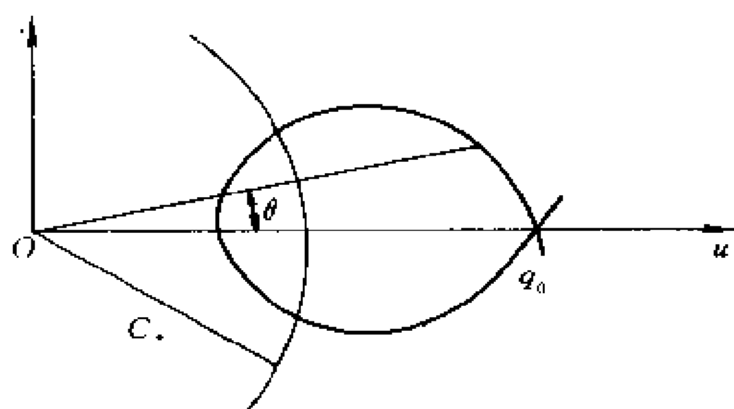


图 5-17

第六章　孤立波和行波解

§1.　孤立波的发现和发展

1834年英国科学家Scott Russell偶然观察到了一种奇妙的水波.1844年,他在《英国科学促进协会第14届会议报告》上发表的《论波动》一文中,对此现象作了生动的描述:“我观察过一次船的运动,这条船被两匹马拉着沿狭窄的运河迅速前进着,突然,船停了下来,而被船所推动的大堆水却并不停止,它们积聚在船头周围激烈地扰动着,然后水浪突然呈现出一个滚圆而平滑、轮廓分明的巨大孤立波峰,它以巨大的速度向前滚动着,急速地离开了船头.在行进中它的形状和速度并没有明显的改变,我骑在马上紧跟着观察,它以每小时约八、九英里的速度滚滚向前,并保持长约30英尺、高约1～1.5英尺的原始形状.渐渐地它的高度下降了.当我跟踪1～2英里后,它终于消失在逶迤的河道之中”.这就是Russell观察到的奇特现象,并称它为“孤立波”.Russell当时未能成功地证明并使物理学家们信服他的论断,从而埋怨数学家未能从已知的流体运动方程预言出这一现象.之后有关孤立波的问题在当时许多物理学家中引起了广泛的争论.直到六十年后的1895年,Korteweg－de Vries研究了浅水波的运动,建立了KdV方程,并从方程求出了与Russell描述一致的,即具有形状不变的脉冲状的孤立波解,从而在理论上证实了孤立波的存在.

从发现到证实经过了60年,可后来又冷静了70年.原因是当时人们认为这种波是不稳定的,又方程是非线性的,不满足解的叠加原理,两个孤立波碰撞后形状很可能会被破坏,因此在没有新的发

现之前，孤立波处于长期被埋没之中.

直到1965年美国著名科学家Kruskal和Zabusky用数值模拟方法详细地考察了等离子体中孤立波碰撞的非线性相互作用过程，得到了比较完整和丰富的结果，证实了孤立波相互作用后不改变波形的论断.他们的这些结果使人们感到惊喜.他们用不同的初始条件在计算机上求解，研究一个高波和一个低波，高的追上低的相互作用，他们作了大量计算，并拍成了电影.



图 6－1　高波追低波，经相互作用后仍保持原来的波形各自向前传播

由于得到上述结果，并在许多物理模型中相继发现都存在这种碰撞后具有不改变波形的稳定的孤立波的事实，从而使许多物理学家和数学家都对此产生了极大的兴趣和注意，并开始掀起了对孤立波问题研究的热潮，逐步形成了较为完整的孤立波理论.

§2. KdV 方 程

2.1　行波解

由Korteweg－de Vries研究浅水波运动建立的方程，其简化形式为

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{2.1}$$

称为KdV方程.为了得到孤立波解，我们求它的行波解.

定义1　一个含时间t的发展型偏微分方程，如果它含有$u(x,t) = U(\xi)$形的解，其中$\xi = x - ct$，c＝常数，那么我们就称这种解为该方程的行波解.

令$u(x,t) = U(\xi)$，$\xi = x - ct$，c＝常数，代入(2.1)得

$$cU' = UU' + U''',$$

对ξ进行一次积分，得

$$cU=\frac{1}{2}U^2+U''+A,$$

其中A为积分常数.对上式乘以U'，然后再积分，得

$$\frac{c}{2}U^2=\frac{1}{6}U^3+\frac{1}{2}U'^2+AU+B,$$

其中B亦为积分常数.将它整理得

$$3U'^2=-U^3+3cU^2-6AU-6B\equiv f(U). \tag{2.2}$$

(2.2)的解仅当$f\geqslant 0$时才可能是实的.现在我们设函数$f(U)$可分解为

$$f(U)=-(U-c_1)(U-c_2)(U-c_3),$$

其中$c_1<c_2<c_3$，由此推出

$$c=\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3),\ A=-\frac{1}{6}(c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1),$$

$$B=-\frac{1}{6}c_1c_2c_3.$$

于是(2.2)式成为

$$3U'^2=-(U-c_1)(U-c_2)(U-c_3). \tag{2.3}$$

令$U-c_2=(c_3-c_2)y^2$，代入得

$$\frac{12}{c_3-c_1}y'^2=(1-y^2)\left(\frac{c_2-c_1}{c_3-c_1}+\frac{c_3-c_2}{c_3-c_1}y^2\right). \tag{2.4}$$

再令

$$\xi_1=\sqrt{\frac{c_3-c_1}{12}}\,\xi,\quad \frac{c_3-c_2}{c_3-c_1}=k_1^2,\quad \frac{c_2-c_1}{c_3-c_1}=k_2^2,$$

于是，(2.4)式化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi_1}\right)^2=(1-y^2)(k_2^2+k_1^2y^2). \tag{2.5}$$

方程(2.5)的解是Jacobi椭圆函数[①]：

---

① 可参看Whittaker E.T., Watson, G.N.所著A Course of Modern Analysis

$$y=\mathrm{cn}(\xi,k_1)=\mathrm{cn}\,\xi_1. \tag{2.6}$$

也可写成

$$\xi_1=\int_y^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1'^2+k_1^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

于是(2.3)(亦即(2.1))的解为

$$u=U=c_2+(c_3-c_2)\mathrm{cn}^2\left\{\sqrt{\frac{c_3-c_1}{12}}\left[x-\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)t\right],k_1\right\}, \tag{2.8}$$

其中 $k_1^2=\dfrac{c_3-c_2}{c_3-c_1}$.

令

$$K=\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k_1^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,$$

则有sn $K=1$, cn $K=0$, $4K$是椭圆函数sn ξ_1, cn ξ_1的周期.

当$k_1=0$时, $\mathrm{cn}(\xi_1,0)=\cos\xi_1$, 即当$c_2\to c_3$时, 如图6－2中的曲线$\Gamma_3$.

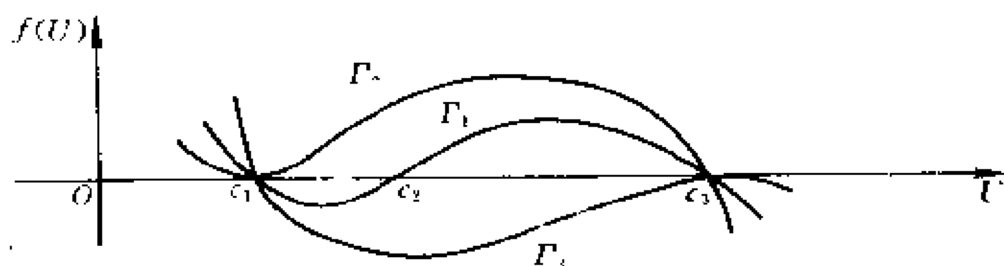


图 6－2

此时方程(2.3)具有振动解

$$U=\bar{c}+a\cos\left\{\sqrt{\frac{c_3-c_1}{3}}\left[x-\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)t\right]\right\},$$

其中$\bar{c}=\dfrac{c_2+c_3}{2}$, $a=\dfrac{c_3-c_2}{2}$.

当$k_1=1$时，$\mathrm{cn}(\xi_1,1)=\mathrm{sech}\,\xi_1$，即当$c_2\to c_1$时，如图6－2中的曲线$\Gamma_2$，这时周期$K$变成无穷大，得到KdV方程的常见的孤立波解：

$$u=c_1+(c_3-c_1)\mathrm{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{c_3-c_1}{12}}\left[x-\frac{1}{3}(2c_1+c_3)t\right]\right\}. \quad (2.9)$$

若设$c_1=u_\infty$，$c_3-c_1=a$，则(2.9)变成

$$u=u_\infty+a\,\mathrm{sech}^2\left\{\sqrt{\frac{a}{12}}\left[x-\left(u_\infty+\frac{a}{3}\right)t\right]\right\}. \quad (2.10)$$

这里u_∞表示在无穷远处的均匀态，a表示孤立波的振幅. 从(2.10)可以看出，这种孤立波的相对于均匀态的速度是正比于振幅的，而波的宽度$b\left(=\sqrt{\frac{12}{a}}\right)$反比于振幅的平方根，且振幅与均匀态无关.

若$u_\infty=0$，则从(2.10)可得

$$u=3c\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{c}{4}}(x-ct)=a\,\mathrm{sech}^2\frac{x-ct}{b}. \quad (2.11)$$

这时振幅$a=3c$，而波宽$b=\frac{2}{\sqrt{c}}$（见图6－3）.

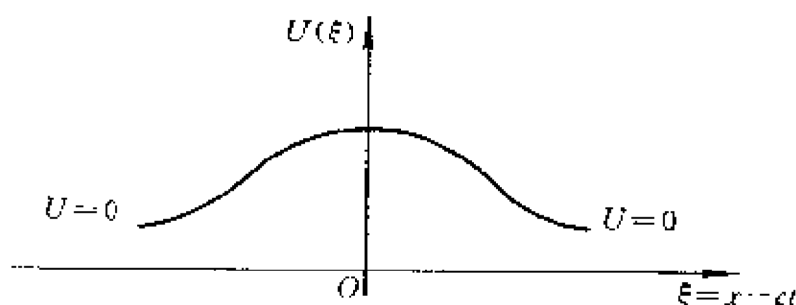


图 6－3

对不同的c，方程(2.1)可以有不同速度的孤立波解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}u_n\,\mathrm{sech}^2\frac{x-c_nt-d_n}{b_n}, \quad (2.12)$$



图 6-4

2.2 无穷多个守恒律

众所周知，物理学中有三个重要的守恒律，即质量守恒、动量守恒和能量守恒.在数学上，当一个物理问题可以用形如

$$u_t = L(u)$$

的微分方程描述时，这一方程对应的守恒律是指可以写成如下的散度形式：

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}=0. \tag{2.13}$$

这里A和B都是与未知函数$u(x,t)$有关的函数.A一般称为守恒密度，B称为守恒流量.当B在区域的边界为零时，由(2.13)可知

$$I=\int A\mathrm{d}x \tag{2.14}$$

是与时间无关的不变量.

将式(2.1)写成

$$u_t+\left(\frac{u^2}{2}+u_{xx}\right)_x=0,$$

就成为(2.13)的守恒形式.

以u乘(2.1)式可得另一个守恒律，以u^2乘(2.1)式，然后减去以$2u_x$乘以(2.1)式关于x微分后所得的式子，得到第三个守恒律.这样一步步我们就可以得到无穷多个守恒律：

$$(A_n)_t+(B_n)_x=0, \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{2.15}$$

其中

$$A_1=u, \qquad B_1=\frac{1}{2}u^2+u_{xx},$$

$$A_2=\frac{1}{2}u^2, \qquad B_2=\frac{1}{3}u^3+uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2,$$

$$A_3=\frac{1}{3}u^3-u_x^2, \qquad B_3=\frac{1}{4}u^4+u^2u_{xx}-2uu_x^2-2u_xu_{xxx}+u_{xx}^2,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

这里假定了u及其微商在$\pm\infty$为0.

将(2.15)式在整个区域上积分，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n(x,t)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty} A_n(x,0)\mathrm{d}x=\text{const.}=C_n, \tag{2.16}$$

这里

$$C_1=\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{d}x \qquad \text{质量守恒},$$

$$C_2=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2(x,t)\mathrm{d}x \qquad \text{动量守恒},$$

$$C_3=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{3}u^3(x,t)-u_x^2(x,t)\right]\mathrm{d}x \qquad \text{能量守恒}.$$

2.3 孤立波的相互作用

设KdV方程为

$$u_t+\delta uu_x+u_{xxx}=0, \tag{2.17}$$

其中δ为一常数.令$u=p_x$，于是

$$(p_t)_x+\delta\left(\frac{1}{2}p_x^2\right)_x+(p_{xxx})_x=0.$$

对x积分之，得

$$p_t+\frac{1}{2}\delta p_x^2+p_{xxx}=0. \tag{2.18}$$

再令$\delta p=12(\ln F)_x$，代入上式，消去一些项，再合并为

$$F(F_t+F_{xxx})_x-F_x(F_t+F_{xxx})+3(F_{xx}^2-F_xF_{xxx})=0. \tag{2.19}$$

注意到(2.19)中含有算子$L=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}$，而$F=1+e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3 t}$($\alpha$、$s$为实数)是$F_t+F_{xxx}=0$的特解.如果(2.19)为线性的，那么可以指望对$\alpha$、$s$叠加求和来产生它的解.现在由于(2.19)是非线性的，具有相互作用项，我们可用通常的办法依相互作用项作近似展开：

$$F=1+F^{(1)}+F^{(2)}+\cdots$$

这里相当于把$F^{(1)}$看作是一阶量，把$F^{(2)}$看作是二阶量，…然后代入(2.19)可得一系列方程：

$$\{F_t^{(1)}+F_{xxx}^{(1)}\}_x=0,$$

$$\{F_t^{(2)}+F_{xxx}^{(2)}\}_x=-3\{(F_{xx}^{(1)})^2-F_x^{(1)}F_{xxx}^{(1)}\},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

如果$F^{(1)}$只取两项：$F^{(1)}=f_1+f_2$，$f_j=e^{\alpha_j(x-s_j)+\alpha_j^3 t}(j=1,2)$，显然这样选取的$F^{(1)}$满足第一个方程.将它代入$F^{(2)}$的方程，得

$$\{F_t^{(2)}+F_{xxx}^{(2)}\}_x=3\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)^2 f_1\cdot f_2,$$

可解出

$$F^{(2)}=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{(\alpha_2+\alpha_1)^2}\quad f_1\cdot f_2.$$

使人感到惊奇的是，$F^{(3)}=F^{(4)}=\cdots=0$.于是我们得到方程(2.19)的精确解为

$$F=1+f_1+f_2+\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1}\right)^2 f_1\cdot f_2. \tag{2.20}$$

我们注意到，在此表达式中相互作用项仅含有f_1f_2，而没有f_1^2和f_2^2项.这个结果可推广到N个f_j上.设$F^{(1)}=\sum_{j=1}^{N}f_j$，则$F^{(2)}$含有$f_j\,f_k\,(j\neq k)$项，而没有$f_j^2(j=1,2,\cdots,N)$项.$F^{(3)}$含有$f_j\,f_k\,f_l\,(j\neq k\neq l)$项、而没有$f_j^3$、$f_j^2f_k$ $(j\neq k,j,k=1,2,\cdots,N)$项等等.所以$F^{(N)}$含有$f_1f_2\cdots f_N$.于是

$$F=1+\sum_j f_j+\sum_{j\neq k}a_{jk}f_j\,f_k+\sum_{j\neq k\neq l}\alpha_{jkl}f_j\,f_k\,f_l+\cdots+a_{12\cdots N}f_1f_2\cdots f_N. \tag{2.21}$$

可以证明，$F=\det|F_{mn}|$，其中$F_{mn}=\delta_{mn}+\dfrac{2\varkappa_m}{\varkappa_m+\varkappa_n}f_m$.

现在考虑$N=2$的情形. 由$\delta u=\delta p=12(\ln F)_{xx}$及$F$的表达式(2.20)，可得KdV方程(2.17)的解的表达式：

$$\frac{\delta u}{12}=\frac{\left\{\varkappa_1^2f_1+\varkappa_2^2f_2+2(\varkappa_2-\varkappa_1)^2f_1f_2+\left(\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa_2+\varkappa_1}\right)^2(\varkappa_2^2f_1^2f_2+\varkappa_1^2f_1f_2^2)\right\}}{\left\{1+f_1+f_2+\left(\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa_2+\varkappa_1}\right)^2f_1f_2\right\}^2},\tag{2.22}$$

其中 $f_j=\exp[-\varkappa_j(x-s_j)+\varkappa_j^3t]$, $j=1,2$.

我们考虑一个孤立波解：

$$\delta u=3\varkappa^2\mathrm{sech}^2\frac{\theta-\theta_0}{2},$$

其中$\theta=\varkappa x-\varkappa^3t$, $\theta_0=s\varkappa$，它可用$f=e^{-\varkappa(x-s)+\varkappa^3t}$来表示：

$$\frac{\delta u}{12}=\frac{\varkappa^2f}{(1+f)^2}.$$

当$f=1$时，δu取极大值. 最大振幅为$\delta u=3\varkappa^2$. 取极大值的位置为$-\varkappa(x-s)+\varkappa^3t=0$. 即$x=s+\varkappa^2t$. 波速$c=\varkappa^2$. 为了考察它们的相互作用和$t\to\pm\infty$的渐近状态，充分利用解的表达式(2.22). 下面我们分几种情况讨论.

(i) 在(x,t)区域上，$f_1\approx1$，f_2很大或很小.

a) $f_1\approx1$, $f_2\ll1$. 从(2.22)可知

$$\frac{\delta u}{12}\approx\frac{\varkappa_1^2f_1}{(1+f_1)^2}.$$

即为孤立了$\varkappa_1$波.

b) $f_1\approx1$, $f_2\gg1$. 从(2.22)可知

$$\frac{\delta u}{12}\approx\frac{\left(\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa_2+\varkappa_1}\right)^2\varkappa_1^2f_1}{\left\{1+\left(\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa_2+\varkappa_1}\right)^2f_1\right\}^2}=\frac{\varkappa_1^2\tilde{f}_1}{(1+\tilde{f}_1)^2},$$

$$\widetilde{f}_1 = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}\right)^2 f_1.$$

此时仍为孤立子α_1波，仅相位s_1换为

$$\widetilde{s}_1 = s_1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2.$$

(ii) 在(x,t)区域上，$f_2 \approx 1$，f_1很大或很小.类似(i)的分析，此时为孤立子α_2波.

(iii) f_1，f_2均很小或很大.此时$\delta u \approx 0$.

(iv) $f_1 \approx 1$，$f_2 \approx 1$.表示相互作用区.

现设$\alpha_2 > \alpha_1 > 0$，α_2波追赶α_1波的情形.

当$t \to -\infty$时：

α_1波：$f \approx 1$，$x = s_1 + \alpha_1^2 t$，

$$f_2 = e^{-\alpha_2(x - s_2) + \alpha_2^3 t} = e^{-\alpha_2(s_1 - s_2) - \alpha_2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)t}$$

$$\ll 1 \quad (t \to -\infty).$$

按前面的讨论，此时表明在$x = s_1 + \alpha_1^2 t$处为孤立子α_1波.

$$\alpha_2\text{波：} f_2 \approx 1, x = s_2 - \frac{1}{\alpha_2} \ln\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2 + \alpha_2^2 t.$$

此时$f_1 \gg 1 \quad (t \to -\infty)$，表明在

$$x = s_2 - \frac{1}{\alpha_2} \ln\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2 + \alpha_2^2 t$$

处为孤立子α_2波.其余地方$\delta u \approx 0$($f_1 f_2$很大或很小).

当$t \to +\infty$时：

$$\alpha_1\text{波：} x = s_1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2 + \alpha_1^2 t, f_1 \approx 1, f_2 \gg 1.$$

α_2波：$x = s_2 + \alpha_2^2 t$，　$f_2 \approx 1$，　$f_1 \ll 1$.

其余处：$\delta u \approx 0$.

上述结果表明：孤立波不改变原来的参量α_1，α_2.快波α_2位于前头.

碰撞相互作用过程仅使

χ_2波向前平移 $\dfrac{1}{\chi_2}\ln\left(\dfrac{\chi_2+\chi_1}{\chi_2-\chi_1}\right)^2$.

χ_1波向后平移 $\dfrac{1}{\chi_1}\ln\left(\dfrac{\chi_2-\chi_1}{\chi_2-\chi_1}\right)^2$.

在$f_1\approx 1$, $f_2\approx 1$相互作用的时间、地点约为(由$x=s_1+\chi_1^2t=s_2+\chi_2^2t$解得)

$$t=-\frac{s_2-s_1}{\chi_2^2-\chi_1^2},\quad x=\frac{\chi_2^2s_1-\chi_1^2s_2}{\chi_2^2-\chi_1^2}.$$

§3. 三次Schrödinger方程

3.1 方程来源

非线性三次Schrödinger方程为

$$\mathrm{i}u_t+u_{xx}+\nu|u|^2u=0, \tag{3.1}$$

或更一般的形式:

$$u_t-\gamma u_{xx}=\chi u-\beta|u|^2u, \tag{3.2}$$

其中$\beta=\beta_0+\mathrm{i}\beta_1$, $\gamma=\gamma_0-\mathrm{i}\gamma_1$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, β_0、β_1、γ_0、γ_1、χ、ν均为实常数.在许多物理问题中均发现此类方程.例如,在非线性光学的细束流中,有方程

$$2\mathrm{i}k\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi+\frac{n_2}{n_0}k^2|\psi|^2\psi=0, \tag{3.3}$$

其中$\psi=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$, $\theta=kx-\omega t+ks(x,r)$, k为波数, $n=\dfrac{c_0k}{\omega}=n_0+\dfrac{1}{2}n_2a^2$; $m=0$时为平面问题, $m=1$时为柱对称问题.

对二维流,有方程

$$\frac{n_2}{n_0}k^2|\psi|^2\psi=-2ki\psi_t-\psi_{xx}-\psi_{yy}. \tag{3.4}$$

其它，如等离子体的Langmuir波；一维单色波的自调制；二维定态平面波的自聚焦；在非相对论下，超导电子在电磁场中运动的Ginzbug－Landau方程等，均可用非线性Schrödinger方程来描述.

3.2 行波解

现在考虑方程(3.1)的行波解.令

$$u(x,t)=e^{i(rx-st)}v(\xi),\quad \xi=x-Dt, \tag{3.5}$$

其中r、s均为待定常数，D＝常数.将此u的表达式代入(3.1)，可得v应满足的常微分方程:

$$v''+i(2r-D)v'+(s-r^2)v+\nu|v|^2v=0. \tag{3.6}$$

取$r=\frac{D}{2}$，$s=\frac{D^2}{4}-\alpha(\alpha>0)$，消去$v'$项，得

$$v''-\alpha v+\nu v^3=0. \tag{3.7}$$

以v'乘此式，积分后得

$$v'^2=A+\alpha v^2-\frac{\nu}{2}v^4. \tag{3.8}$$

当$\nu>0$，$A=0$时，可得

$$v(x,t)=\left(\frac{2\alpha}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sech}\sqrt{\alpha}\,(x-Dt). \tag{3.9}$$

显然，$|u|^2\propto\operatorname{sech}^2\sqrt{\alpha}\,(x-Dt)$，称$v(x,t)$为包络孤立波.注意到$\operatorname{sech}^2$正是描述关于KdV方程孤立波的同一函数.然而，这里的重要区别是，振幅和速度为独立参数.

现在考察方程(3.1)的更一般形式的解:

$$u(x,t)=\phi(x,t)e^{i\theta(x,t)}, \tag{3.10}$$

其中ϕ、θ均为实函数，并称θ为载波，ϕ为包络波.将(3.10)代入(3.1)，分开实部和虚部可得

$$\phi_{xx}-\phi\theta_t-\phi\theta_x^2+\nu\phi^3=0,\quad \nu>0, \tag{3.11a}$$

$$\phi\theta_{xx}+2\phi_x\theta_x+\phi_t=0. \tag{3.11b}$$

设$\theta=\theta(x-D_1t)$，$\phi=\phi(x-D_2t)$，代入(3.11)得

$$\phi_{xx}+D_1\phi\theta_x-\phi(\theta_x)^2+\nu\phi^3=0, \tag{3.12}$$

$$\phi\theta_{xx}+2\phi_x\theta_x-D_2\phi_x=0. \tag{3.13}$$

在(3.13)式中将t固定，对变量x积分，得

$$\phi^2(2\theta_x-D_2)=\psi(t). \tag{3.14}$$

取$\psi(t)=0$，得$\theta_x=\frac{1}{2}D_2$.将此代入(3.12)式，并对x积分，得

$$\int_{\phi_1}^{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{p(\phi)}}=x-D_2t. \tag{3.15}$$

其中

$$p(\phi)=-\frac{\nu}{2}\phi^4+\frac{1}{4}(D_2^2-2D_1D_2)\phi^2+C. \tag{3.16}$$

若$C=0$，$D_2^2-2D_1D_2>0$，则$\phi=0$为$p(\phi)=0$的二重根;还有两个根为$\phi=\pm\phi_0$，$\phi_0=\sqrt{\dfrac{D_2^2-2D_1D_2}{2\nu}}$.此时

$$\phi=\phi_0\operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{\nu}{2}}\phi_0(x-D_2t)\right]. \tag{3.17}$$

如图6－5所示.

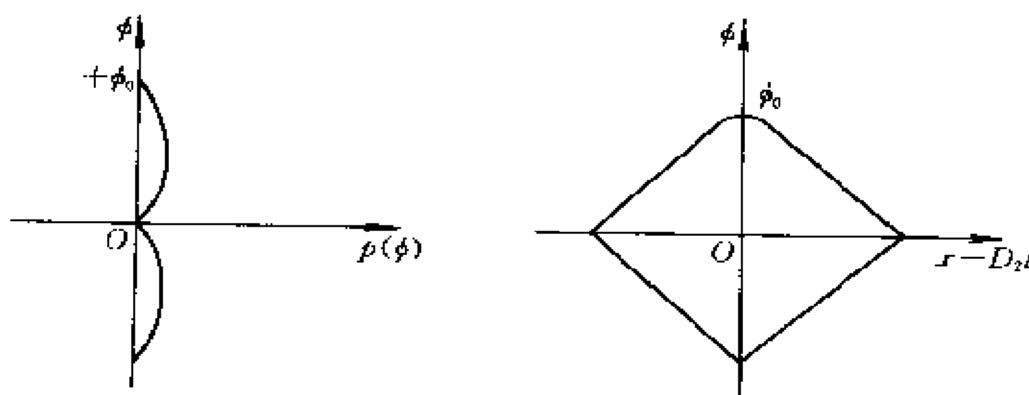


图 6－5

如果$p(\phi)<0$，那么不可能有行波解.若$C\neq0$，则当$\left[\frac{1}{4}(D_2^2-2D_1D_2)\right]^2+2\nu C\geqslant0$或

$$C>-\frac{1}{8v}\left(\frac{D_2^2}{2}-D_1D_2\right)^2$$

且$C<0$时，$p(\phi)$有单根$\pm\phi_1$，$\pm\phi_2$，如图6-6所示.

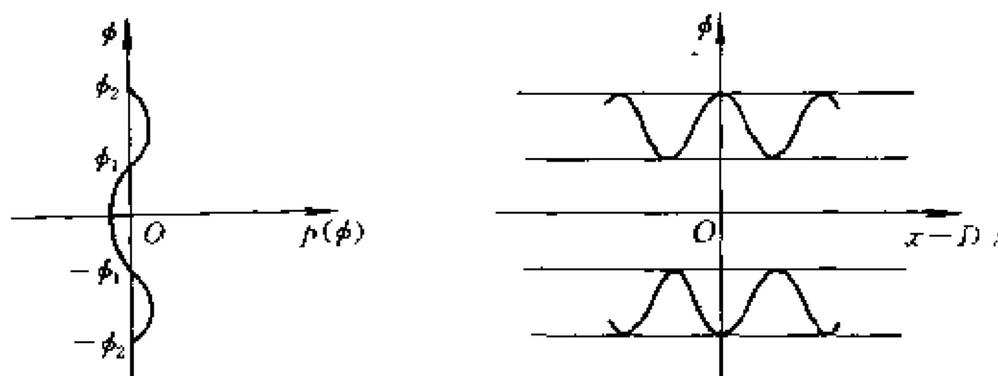


图 6-6

此时积分为椭圆函数

$$\phi=\phi_1\left[1-\left\{\left(1-\frac{\phi_1^2}{\phi_2^2}\right)\mathrm{sn}^2\left[\frac{\sqrt{v}}{2}(x-D_2t)\right]\right\}\right]^{-\frac{1}{2}},\qquad(3.18)$$

其中椭圆函数sn具有mod $r=1-\frac{\phi_1^2}{\phi_2^2}$.

§4. Sine-Gordon方程

4.1 方程来源

比KdV方程更为简单的方程是非线性Klein-Gordon方程：

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+V'(\phi)=0,\qquad(4.1)$$

其中$V'(\varphi)$为φ的某一合理的非线性函数.方程(4.1)是一个有用的模型，它出现于各种物理问题中.$V'(\varphi)=\sin\varphi$的情形尤其如此.这时方程

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\sin\varphi=0\qquad(4.2)$$

称为Sine-Gordon方程.这个方程最初不是在波动问题中出现的，而是在研究高斯曲率$K=-1$的曲面的几何学问题时出现的.物理问题有

(i) Josephson连接传输线，其中$\sin\varphi$为穿过两个超导体之间的一个绝缘体的Josephson电流，电压正比于φ_t.

(ii) 晶体中的位错，其中出现$\sin\varphi$是由于原子排列的周期结构.

(iii) 铁磁质中带有磁化方向旋转的波的传播.

(iv) 两态介质中的激光脉冲，其中变量也可以借助于旋转矢量来描述.

(v) Scott进一步描述了他所构造的力学模型：在一张紧的金属丝上以密集的间隔固定着许多刚性摆，沿金属丝传播的扭转波服从波动方程，而这些摆提供了正比于$\sin\varphi$的恢复力，这里φ为角位移.Scott能够产生和sine－Gordon方程的许多解相对应的波.可以得到围绕$\varphi=0$作周期振荡的解族.

4.2 行波解，周期波列与孤立波

求(4.2)的行波解$\varphi=\phi(\xi)$，$\xi=x-ct$，代入方程得

$$(1-c^2)\phi''=\sin\phi=-\frac{\mathrm{d}\cos\phi}{\mathrm{d}\phi}=-\frac{\mathrm{d}\cos\phi}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{1}{\phi'}.$$

以ϕ'乘方程两端，积分之得

$$\frac{1}{2}(c^2-1)\phi'^2+1-\cos\phi=A,$$

或

$$\frac{1}{2}(c^2-1)\phi'^2+2\sin^2\frac{\phi}{2}=A, \tag{4.3}$$

其中A为与振幅有关的积分常数.

可以分为以下各种情形：

(i) $0<A<2, c^2-1>0$.

这些是ϕ在$\phi=0$附近$-\phi_0<\phi<\phi_0$的范围中振荡的周期解，其中

$$\phi_0=2\arcsin\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) $0<A<2$，$c^2-1<0$.

这些是 ϕ 在 $\phi=\pi$ 附近，在 $\pi-\phi_0<\phi<\pi+\phi_0$ 的范围中振荡的周期解.

(iii) $A<0$, $c^2-1<0$.

这些是满足

$$\phi' = \pm\left\{\frac{1}{1-c^2}\left(|A|+2\sin^2\frac{\phi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

的螺旋形波，ϕ 单调增加或减小.

(iv) $A>2$, $c^2-1>0$.

这些也是螺旋形波，满足

$$\phi' = \pm\left\{\frac{2}{c^2-1}\left(A-2\sin^2\frac{\phi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(v) 极限情形 $A=0$, $c^2-1<0$.

这时(4.3)的解为

$$\tan\left(\frac{\phi}{4}\right) = \pm\exp\left\{(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}(\xi-\xi_0)\right\}, \tag{4.4}$$

对应的边界条件为 $\phi(\pm\infty)=0 \pmod{2\pi}$, $\phi'(\pm\infty)=0$.

它们代表大小为 2π 的单扭结. 如果两个符号都取正号，它是从 $x=-\infty$ 处 $\phi=0$ 到 $x=+\infty$ 处 $\phi=2\pi$ 的一个正扭结(pink)，见图6－7.

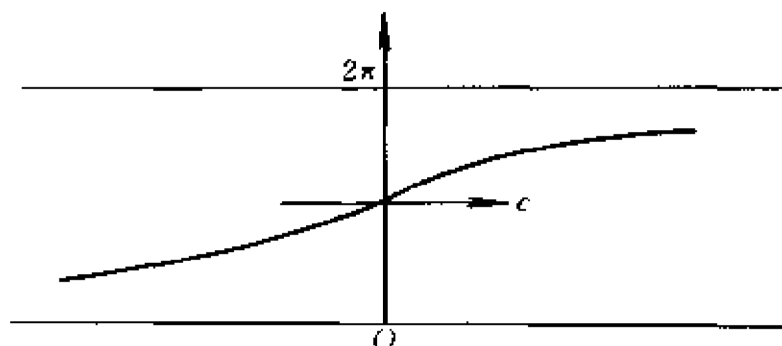


图 6－7　正扭结

如果两个符号都取负号，它仍然是一个正扭结，不过是从 $x=-\infty$ 处的 $\phi=-2\pi$ 变到 $x=+\infty$ 处的 $\phi=0$.

如果两个符号相反，则给出反扭结(antipink)，见图6－8.

(vi) 极限情形 $A=2$, $c^2-1>0$.

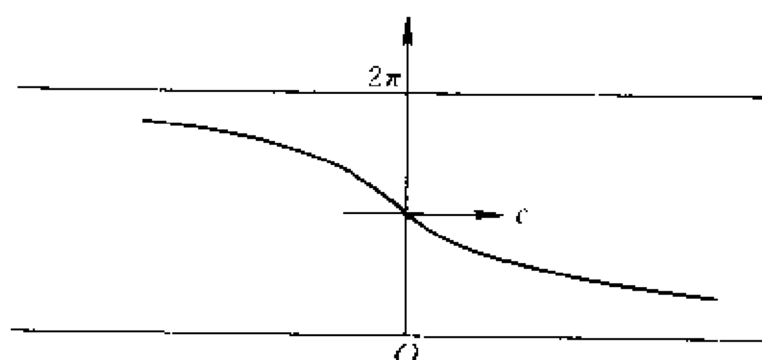


图 6-8 反扭结

这时(4.3)的解为

$$\tan\left(\frac{\phi+\pi}{4}\right)=\exp\left\{\pm(c^2-1)^{-\frac{1}{2}}(\xi-\xi_0)\right\}. \tag{4.5}$$

这个解代表一个在$\phi=-\pi$和$\phi=\pi$之间的扭结.

以上(i)和(ii)是不稳定的,螺旋形波(iii)和(iv)是稳定的.(vi)是完全不稳定的.因为它要求在无穷远处$\phi=\pm\pi$.例如在Scott摆模型中,这对应于摆处在铅直向上的位置.(v)是我们所要的孤立波解.回到方程(4.2),解可写为

$$\varphi(x,t)=\phi(\xi)=4\arctan\exp\left(\pm\frac{x-ct-\xi_0}{\sqrt{1-c^2}}\right),\quad |c|<1. \tag{4.6}$$

4.3 Bäcklund变换

设φ、ψ是Sine-Gordon方程(4.2)的两个解:

$$\varphi_{tt}=\varphi_{xx}-\sin\varphi\ ,\quad \psi_{tt}=\psi_{xx}-\sin\psi. \tag{4.7}$$

令$u=\varphi+\psi$,$v=\varphi-\psi$,于是u和v满足下列方程

$$u_{tt}=u_{xx}-2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}, \tag{4.8}$$

$$v_{tt}=v_{xx}-2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}. \tag{4.9}$$

所谓Bäcklund变换就是要求下面形式的变换:

$$
\begin{cases}
u_t = F(u, v, u_x, v_x), \\
v_t = G(u, v, u_x, v_x),
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

使得u和v是(4.8)、(4.9)的解. 事实上, 就是要求函数F和G. 由(4.10)的第一式对t求导得

$$
u_{tt} = F_u F + F_v G + F_{u_x} u_{xt} + F_{v_x} v_{xt}, \tag{4.11}
$$

其中u_{xt}、v_{xt}可由(4.10)对x求导来得到:

$$
u_{xt} = F_u u_x + F_v v_x + F_{u_x} u_{xx} + F_{v_x} v_{xx},
$$

$$
v_{xt} = G_u u_x + G_v v_x + G_{u_x} u_{xx} + G_{v_x} v_{xx}.
$$

代入(4.11), 得

$$
\begin{aligned}
u_{tt} = {} & F_u F + F_v G + F_{u_x}(F_u u_x + F_v v_x) + F_{v_x}(G_u u_x + G_v v_x) \\
& + (F_{u_x}^2 + F_{v_x} G_{u_x}) u_{xx} + (F_{u_x} F_{v_x} + F_{v_x} G_{v_x}) v_{xx}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

将(4.12)和(4.8)作比较就导出

$$
F_{u_x}^2 + F_{v_x} G_{u_x} = 1, \; F_{v_x}(F_{u_x} + G_{v_x}) = 0. \tag{4.13}
$$

同样地, 由(4.10)第二式对t求导得

$$
\begin{aligned}
v_{tt} = {} & G_v G + G_u F + G_{v_x}(G_v v_x + G_u u_x) + G_{u_x}(F_v v_x + F_u u_x) \\
& + (G_{v_x}^2 + G_{u_x} F_{v_x}) v_{xx} + (G_{v_x} G_{u_x} + G_{u_x} F_{u_x}) u_{xx}.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

将它和(4.9)作比较就导出

$$
G_{v_x}^2 + G_{u_x} F_{v_x} = 1, \quad G_{u_x}(G_{v_x} + F_{u_x}) = 0. \tag{4.15}
$$

由(4.13)和(4.15), 我们可得下面的结果

$$
F_{v_x} = G_{u_x} = 0, \; F_{u_x} = 1, \quad G_{v_x} = -1. \tag{4.16}
$$

因此, 我们将变换式(4.10)化简为下面的形式:

$$
\begin{cases}
u_t = u_x + f(u, v), \\
v_t = -v_x + g(u, v).
\end{cases}
\tag{4.17}
$$

重复上面的做法, 可导出

$$
\begin{cases}
f_v = 0, \quad f_u f + f_v g = -2\sin\dfrac{u}{2}\cos\dfrac{v}{2}, \\
g_u = 0, \quad g_v g + g_u f = -2\sin\dfrac{v}{2}\cos\dfrac{u}{2}.
\end{cases}
\tag{4.18}
$$

由此就得到

$$f=2\lambda\sin\frac{v}{2},\ g=-\frac{2}{\lambda}\sin\frac{u}{2}. \tag{4.19}$$

其中$\lambda\neq0$为常数.

因此,我们所求的Bäcklund变换为

$$\begin{cases}u_t=u_x+2\lambda\sin\dfrac{v}{2},\\ v_t=-v_x-\dfrac{2}{\lambda}\sin\dfrac{u}{2}.\end{cases} \tag{4.20}$$

或回到原来的函数φ和ψ,得

$$\begin{cases}\psi_x=\varphi_t-\lambda\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}+\dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{\varphi+\psi}{2},\\ \psi_t=\varphi_x+\lambda\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}+\dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{\varphi+\psi}{2}.\end{cases} \tag{4.21}$$

这就是我们所要求的Bäcklund变换.利用(4.21)容易验证:如果φ满足方程(4.7)的第一式,那么ψ就满足(4.7)的第二式.因此,如果已知Sine-Gordon方程(4.2)的一个解φ,那么就可由(4.21)求出它的另一个新的解.例如,已知$\varphi=0$是方程(4.2)的解,由(4.21)得它的另一个解ψ应满足

$$\begin{cases}\psi_x=\lambda\sin\dfrac{\psi}{2}+\dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{\psi}{2}=\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)\sin\dfrac{\psi}{2},\\ \psi_t=-\lambda\sin\dfrac{\psi}{2}+\dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{\psi}{2}=\left(-\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)\sin\dfrac{\psi}{2}.\end{cases} \tag{4.22}$$

由此容易求出Sine-Gordon方程的解ψ:由(4.22)的第一式对x和第二式对t分别积分,得

$$\ln\left|\tan\frac{\psi}{4}\right|=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+p(t),$$

$$\ln\left|\tan\frac{\psi}{4}\right|=\frac{1}{2}\left(-\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)t+q(x).$$

由此得

$$p(t)-\frac{1}{2}\left(-\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)t=q(x)-\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x=\text{const}=\delta.$$

因此有

$$\psi=4\arctan\exp\left[\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+\frac{1}{2}\left(-\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)t+\delta\right].$$

取$\lambda^2=\dfrac{1+c}{1-c}$，这就是(4.6)中的形式.

如果取$\eta=\dfrac{1}{2}(x+t)$，$\xi=\dfrac{1}{2}(x-t)$，那么Sine - Gordon方程(4.2)变为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}=\sin\varphi. \tag{4.23}$$

这个方程有特定的几何意义：设φ是两渐近方向的夹角，则曲率为常数K的旋转曲面满足方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}=-K\sin\varphi. \tag{4.24}$$

因此，Sine－Gordon方程即为$K=-1$的曲面方程.$K=-1$的旋转曲面只有图6－9中的三种：

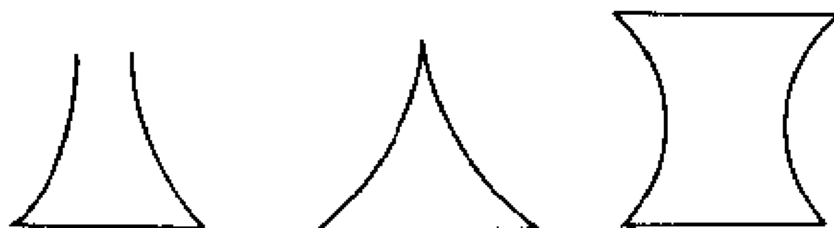


图 6 9 $K=-1$的旋转曲面

在(ξ,η)坐标系中Bäcklund变换(4.21)可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\dfrac{2}{\lambda}\sin\dfrac{\psi+\varphi}{2},\\[2mm]\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}+2\lambda\sin\dfrac{\psi-\varphi}{2}.\end{cases} \tag{4.25}$$

Lamb(1967，1971)就是利用这个变换来逐次产生Sine－Gordon方程的新解的.

4.4 孤立波的相互作用

利用Bäcklund变换和Bianchi交换性可以得到两个孤立波的

相互作用.

设已知一解φ_0，用参数λ_1经Bäcklund变换后得解φ_1，再用参数λ_2经变换后得解φ_3. 如果从解φ_0先用参数λ_2经Bäcklund变换后得解φ_2，然后再用参数λ_1经变换后得解φ_3'，Bianchi交换性就是说$\varphi_3'=\varphi_3$. 我们用图6-10(称为Lamb图)表示如下:

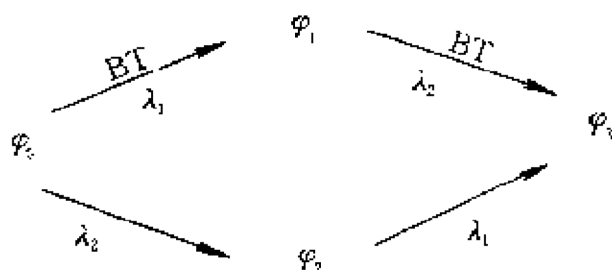


图 6-10 Lamb图

现在用解析式表达出来. 根据变换式(4.25)的第一式，上下两条路线可分别表达成

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}=\frac{1}{\lambda_1}\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2},\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2}=\frac{1}{\lambda_2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2}, \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\varphi_0-\varphi_2}{2}=\frac{1}{\lambda_2}\sin\frac{\varphi_0+\varphi_2}{2},\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}=\frac{1}{\lambda_1}\sin\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}. \tag{4.27}$$

在(4.26)、(4.27)中各自两式相加得

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\varphi_0-\varphi_3}{2}\right)=\frac{1}{\lambda_1}\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}+\frac{1}{\lambda_2}\sin\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}=\frac{1}{\lambda_2}\sin\frac{\varphi_0+\varphi_2}{2}+\frac{1}{\lambda_1}\sin\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}. \tag{4.28}$$

同样地，根据变换式(4.25)的第二式还可得

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}=\lambda_1\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2},$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}=\lambda_2\sin\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2}. \tag{4.29}$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\varphi_0+\varphi_2}{2}=\lambda_2\sin\frac{\varphi_0-\varphi_2}{2},$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}=\lambda_1\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}. \tag{4.30}$$

将(4.29)、(4.30)中各自两式相减得

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varphi_0-\varphi_3}{2}\right)=\lambda_1\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}-\lambda_2\sin\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2}$$
$$=\lambda_2\sin\frac{\varphi_0-\varphi_2}{2}-\lambda_1\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}. \tag{4.31}$$

由(4.28)和(4.31)可导出

$$(\lambda_1-\lambda_2)\tan\frac{\varphi_3-\varphi_0}{4}=(\lambda_1+\lambda_2)\tan\frac{\varphi_1-\varphi_2}{4},$$

或写成

$$\tan\frac{\varphi_3-\varphi_0}{4}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\tan\frac{\varphi_1-\varphi_2}{4}. \tag{4.32}$$

这个方程表示：已知三个解φ_0、φ_1、φ_2时即可求得第四个解φ_3.

特别地，当$\varphi_0=0$时

$$\varphi_3=4\arctan\left[\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\tan\frac{\varphi_1-\varphi_2}{4}\right], \tag{4.33}$$

而由(4.26)和(4.29)，(4.27)和(4.30)中的第一式当$\varphi_0=0$时可分别解出

$$\begin{cases}\tan\dfrac{\varphi_1}{4}=\exp\left(\lambda_1\xi+\dfrac{\eta}{\lambda_1}\right),\\ \tan\dfrac{\varphi_2}{4}=\exp\left(\lambda_2\xi+\dfrac{\eta}{\lambda_2}\right).\end{cases} \tag{4.34}$$

将此代入(4.33)，得

$$\tan\frac{\varphi_3}{4}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot\frac{\exp\left(\lambda_1\xi+\frac{\eta}{\lambda_1}\right)-\exp\left(\lambda_2\xi+\frac{\eta}{\lambda_2}\right)}{1+\exp\left(\lambda_1\xi+\frac{\eta}{\lambda_1}\right)\exp\left(\lambda_2\xi+\frac{\eta}{\lambda_2}\right)}. \tag{4.35}$$

这个解就比前面讲的行波解进了一步，它反映了两个孤立波的相互作用.

例1 正扭结和正扭结.

取 $\lambda_1=\lambda>0$, $\lambda^2=\frac{1+c}{1-c}$, $c>0$，正扭结，

$$\lambda_2=\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{\lambda^2}=\frac{1-c}{1+c},\ -c>0，传播速度相反.$$

考虑到

$$\lambda\xi+\frac{1}{\lambda}\eta=\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}},\quad \frac{1}{\lambda}\xi+\lambda\eta=\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}},$$

由(4.34)式，得

$$\begin{cases}\tan\frac{\varphi_1}{4}=\exp\left(\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}\right),\\ \tan\frac{\varphi_2}{4}=\exp\left(\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}\right),\end{cases} \tag{4.36}$$

于是得

$$\varphi_3=4\arctan\left(\frac{\sinh\frac{ct}{\sqrt{1-c^2}}}{c\cosh\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}}\right). \tag{4.37}$$

这是正扭结—正扭结(pink－pink)相互作用.

例2 正扭结和反扭结.

取$\lambda_1=\lambda>0$，$\lambda_2=-\frac{1}{\lambda}$，于是有

$$\begin{cases} \varphi_1 = 4\arctan \exp\left(\dfrac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}\right), \\ \varphi_2 = 4\arctan \exp\left(-\dfrac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}\right). \end{cases}$$

这时

$$\varphi_3 = 4\arctan\left(\frac{c\sinh\dfrac{x}{\sqrt{1-c^2}}}{\cosh\dfrac{ct}{\sqrt{1-c^2}}}\right). \tag{4.38}$$

这是正扭结—反扭结(pink - antipink)相互作用.

为了看清楚(4.38)代表两个孤立波的相互作用，注意当$t\to\pm\infty$时它的性态，这由下式给出:

$$t\to-\infty, \varphi_3 \sim c\exp\left(\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}\right) - c\exp\left(-\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}\right),$$

$$t\to+\infty, \varphi_3 \sim -c\exp\left(-\frac{x+ct}{\sqrt{1-c^2}}\right) + c\exp\left(\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}\right).$$

这两个式子中的每一式都代表着沿相反方向运动的孤立波. 以速度c运动的正扭结从$x=-\infty$入射，并且在相互作用后仍作为正扭结而出现. 指数外面的因子c可以作为x的位移而吸收到指数中去. 由于相互作用，从$-\infty$入射的正扭结位移了$2\sqrt{1-c^2}\ln\dfrac{1}{c}$. 正扭结和反扭结相互作用，当$t\to+\infty$时它们是相互吸引的，相碰时加快速度，相互作用后又分开.

Bäcklund变换依赖于参数λ，可取λ为复数: $\lambda_1=p+\mathrm{i}q$, $\lambda_2=p-\mathrm{i}q$, $p^2+q^2=1$, p, q为实数. φ_1、φ_2均为复的，但得到的φ_3却是实的:

$$\varphi_3 = 4\arctan\left(\frac{\sin\frac{ct}{\sqrt{1+c^2}}}{c\cosh\frac{x}{\sqrt{1+c^2}}}\right). \tag{4.39}$$

这里我们取$p=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$, $q=\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$. 由于sin的性质，两扭结的中心，靠近又分开，是振动的，称为呼吸子(breathers)，相互振动又同时往前跑.